قسم الرياضيات
Department of Mathematics

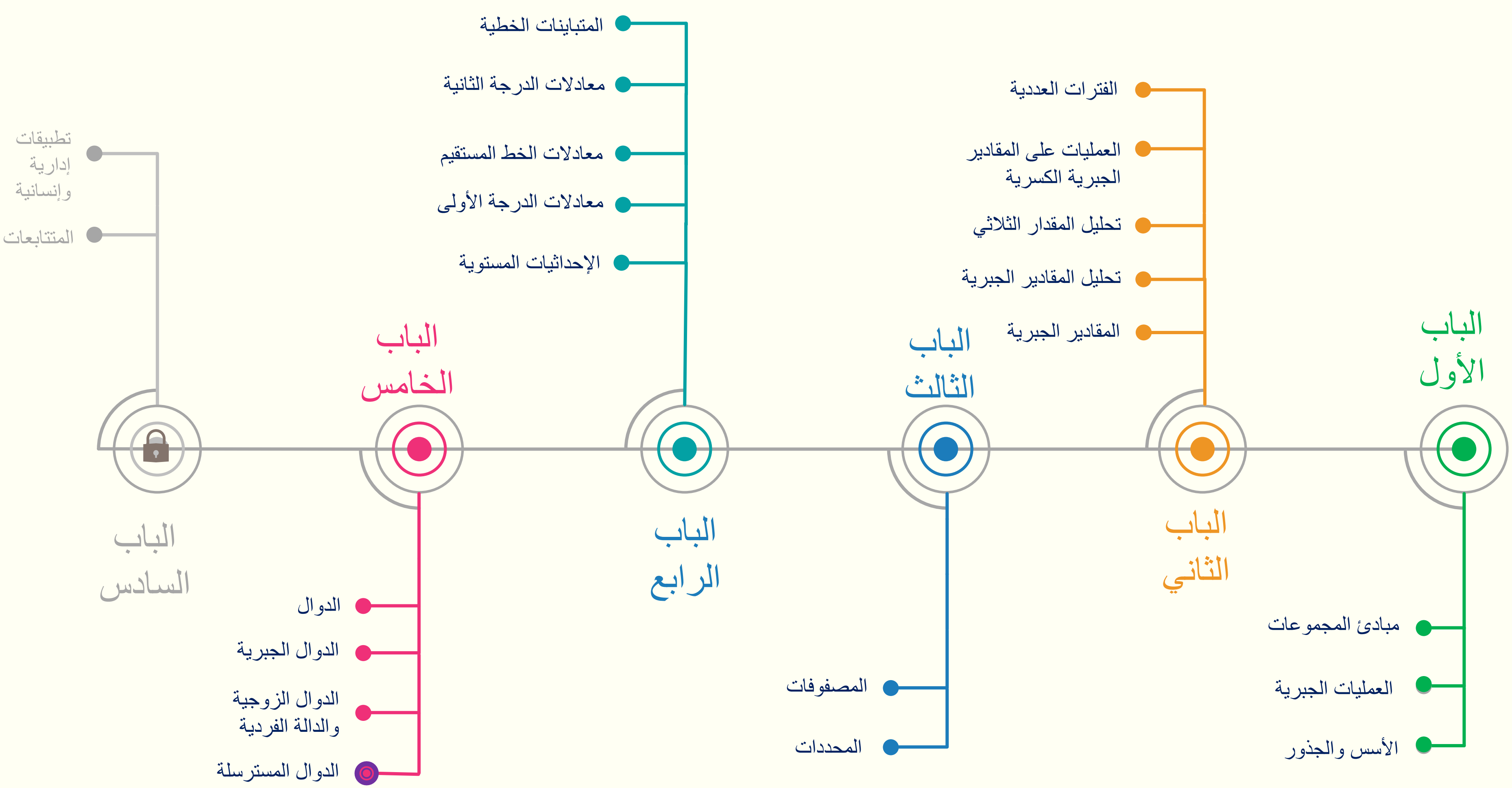
MATH 111

الرياضيات للمسار الإداري والإنساني

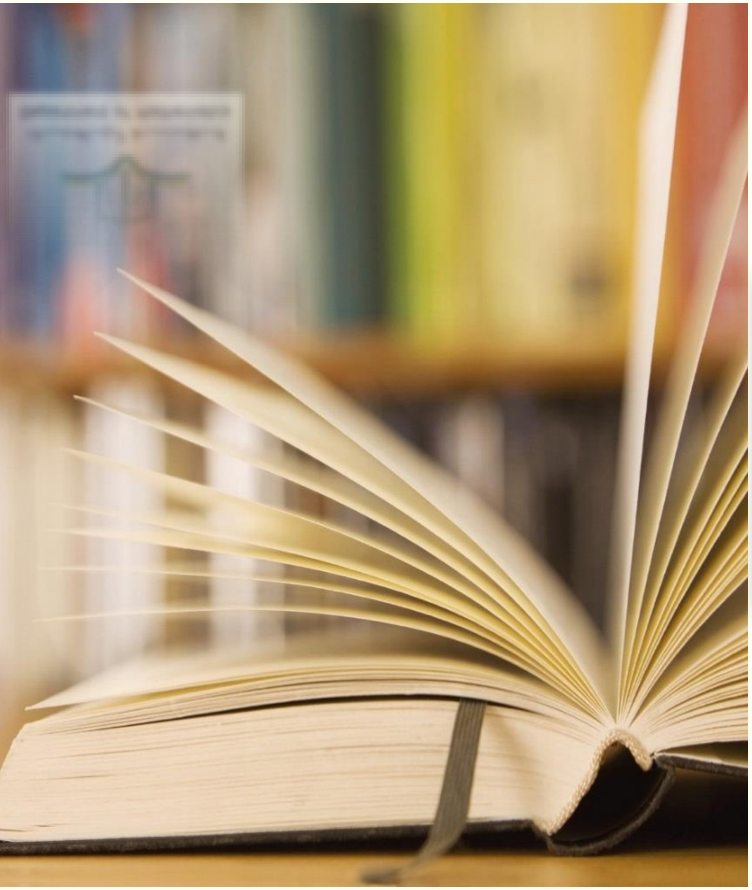
إعداد قسم الرياضيات بجامعة الملك عبدالعزيز

الطبعة الثانية 1442هـ - 2021م

الطبعة الثانية 1442هـ - 2021م



قسم الرياضيات
Department of Mathematics



الباب الخامس : الدوال

5-4 الدوال المسترسلة

الدالة الأُسية العامة

❖ **تعريف (الدالة الأسية العامة):**

تسمى الدالة $y = f(x) = a^x$ دالة أسية عامة حيث a عدد حقيقي موجب لا يساوي الواحد الصحيح.

ملاحظة

يسمى a بالأساس والمتغير x بالأس.

مجال أي دالة أسية عامة هو $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ وَ مداها هو $(0,\infty)$

الدالة الأُسية الطبيعية

وكحالة خاصة من الدالة الأسية العامة نعرّف التالي:

❖ **تعريف (الدالة الأسية الطبيعية):**

تسمى الدالة $y = f(x) = e^x$ دالة أسية طبيعية حيث عدد e غير قياسي

ويساوي تقريباً $e \approx 2.7182$ ويسمى بالأساس الطبيعي.

مجال أي دالة أسية طبيعية هو $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ وَ مداها هو $(0,\infty)$

تمرين

أوجد مجال الدالة الأسية الطبيعية التالية $f(x) = 3e^x$ ؟

مثال حدد ما إذا كانت الدوال التالية تمثل دوالاً أسية عامة أم لا.

1) $f(x) = x^5$

2) $f(x) = 4^x$

3) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1) $f(x) = x^5$ لا تمثل دالة أسية لأن الأساس $a = x$ متغير وليس عدد ثابت.

2) $f(x) = 4^x$ تمثل دالة أسية لأن الأساس $a = 4$ عدد ثابت والمتغير x الأس.

3) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ تمثل دالة أسية لأن الأساس $a = \frac{1}{2}$ عدد ثابت والمتغير x الأس.

مثال حدد ما إذا كانت الدوال التالية تمثل دوالاً أسية أم لا.

1) $f(x) = x^x$

2) $f(x) = 3^x - x$

1) $f(x) = x^x$ لا تمثل دالة أسية لأن الأساس $a = x$ متغير وليس عدد ثابت.

2) $f(x) = 3^x - x$ لا تمثل دالة أسية لوجود الحد الثاني $(-x)$.

خواص الدالة الأسية العامة

ملاحظة تتبع الدالة الأسية العامة قواعد الأسس السابق ذكرها في الفصل 1.3

والمذكورة أدناه:

خاصية إذا كان a, b عددان حقيقيان موجبان لا يساويان الواحد الصحيح، فإنَّ:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(a\,b)^x = a^x b^x$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
6. $(a)^{-x} = \frac{1}{a^x}$
7. $a^0 = 1$

خواص الدالة الأسية الطبيعية

أيضاً تتبع الدالة الأسية الطبيعية قواعد الأسس السابق ذكرها في الفصل 1.3 لكونها حالة خاصة من الدالة الأسية العامة:

1. $e^{x+y} = e^x e^y$
2. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
3. $(e^x)^y = e^{xy}$
4. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
5. $e^0 = 1$

الدالة اللوغاريتمية

❖ تعريف (الدالة اللوغاريتمية العامة):

تسمى الدالة $y = f(x) = \log_a x$ دالة لوغاريتمية عامة حيث $a \neq 1$ و $a > 0$ ويسمى أساس الدالة اللوغاريتمية.

ملاحظة

إذا كانت $a = 10$ فإن الدالة اللوغاريتمية العامة تكتب على الصورة

$$y = \log_{\mathbf{10}} \boldsymbol{x} = \log x$$

مجال أي دالة لوغاريتمية هو $(0,\infty)$ وَ مداها هو $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$

تمرين

أوجد مجال الدالة اللوغاريتمية التالية $f(x) = \log_3(x)$ ؟

الدالة اللوغاريتمية

وكحالة خاصة من الدالة اللوغاريتمية العامة نعرّف التالي:

❖ **تعريف (الدالة اللوغاريتمية الطبيعية):** هي الدالة التي معادلتها على الصورة

$$y = f(x) = \log_e x = \ln x$$

حيث يُسمى e بالأساس الطبيعي للدالة اللوغاريتمية الطبيعية.

مجال أي دالة لوغاريتمية طبيعية هو $(0,\infty)$ وَ مداها هو $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$

خواص الدالة اللوغارتمية العامة

إذا كان u, w عددين حقيقين موجبين و a عدد حقيقي موجب غير الواحد، فإنَّ:

i. $\log_a(uw) = \log_a u + \log_a w$

ii. $\log_a\left(\frac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$

iii. $\log_a u^n = n\log_a u,\qquad (n \in \mathbb{R})$

iv. $\log_a a = 1$

v. $\log_a(1) = 0$

vi. $\log_a u = w \Leftrightarrow u = a^w$

خواص الدالة اللوغارتمية العامة

مثال

بسّط الدالة التالية $y = \log_5(5x+3) + \log_5 2$ ؟

$$y = \log_5(5x+3) + \log_5 2$$

$$y = \log_5 [2(5x+3)]$$

$$= \log_5 10x + 6.$$

خواص الدالة اللوغارتمية الطبيعية

إذا كان x, y عددين حقيقين موجبين و e أساس اللوغاريتم الطبيعي، $n \in \mathbb{R}$ فإنَّ:

a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

b) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

c) $\ln x^n = n \ln x$

d) $\ln e^x = x$

e) $e^{\ln x} = x$

f) $\ln e = 1$

g) $\ln 1 = 0$

h) $x = e^y \Leftrightarrow \ln x = y$

مثال

أوجد قيمة ما يلي :

1. $\log_7 1 = 0$

2. $\log_5 5 = 1$

3. $\log_2(16) = \log_2(2^4) = 4\log_2(2) = 4(1) = 4$

4. $\log_5(125) = \log_5(5^3) = 3\log_5(5) = 3(1) = 3$

5. $\log 0.01 = \log\left(\frac{1}{100}\right) = \log\left(\frac{1}{10^2}\right) = \log(10^{-2}) = -2\log(10) = -2$

6. $\log(10000) = \log(10^4) = 4\log(10) = 4(1) = 4$

مثال

أوجد قيمة ما يلي :

1. $\log_2 80 - \log_2 5$

$$= \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4(1) = 4$$

2. $\log_4 32 + \log_4 2$

$$= \log_4(32 \times 2) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3\log_4 4 = 3(1) = 3$$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

مما سبق دراسته من خواص الدالة الأسية واللوغاريتمية يتبين أنّ:

$$\log_a x = y \iff x = a^y, \qquad a \neq 1, \qquad a, x > 0$$

قوانين تساوي الأسس

- إذا كان $a^m = a^n$ (حيث $a > 0, a \neq 1$) فإن $m = n$.
- إذا كان $x^m = y^m$ (حيث m عدد فردي) فإن $x = y$.
- إذا كان $x^m = y^m$ (حيث m عدد زوجي) فإن $x = \pm y$.

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

مثال إذا كان $5^{3x-2} = 125$ فأوجد قيمة x.

$$5^{3x-2} = 125$$

$$\Longrightarrow \quad 5^{3x-2} = 5^3$$

$$\Longrightarrow \quad 3x - 2 = 3$$

$$\Longrightarrow \quad 3x = 3 + 2$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

مثال

إذا كان $2^{x-1} = 16$ فأوجد قيمة x.

$$2^{x-1} = 16$$

$$2^{x-1} = 2^4$$

$$\Longrightarrow \quad x - 1 = 4$$

$$\Longrightarrow \quad x = 4 + 1$$

$$\Longrightarrow \quad x = 5$$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

مثال إذا كان $\log_x 64 = 3$ فأوجد قيمة x.

$$\log_x 64 = 3 \quad \Longrightarrow \quad 64 = x^3$$

$$\Longrightarrow \quad 4^3 = x^3$$

$$\Longrightarrow \quad x = 4$$

مثال إذا كان $\log_4 x = 3$ فأوجد قيمة x.

$$\log_4 x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = 4^3$$

$$\Longrightarrow \quad x = 64$$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

مثال إذا كان $\log_4 64 = x$ فأوجد قيمة x.

$$\log_4 64 = x \quad \Longrightarrow \quad 64 = 4^x$$

$$\Longrightarrow \quad 4^3 = 4^x$$

$$\Longrightarrow \quad x = 3$$

مثال

إذا كان $\log_x 125 = \frac{3}{2}$ فأوجد قيمة x.

$$\log_x 125 = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad 125 = x^{\frac{3}{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad 5^3 = x^{\frac{3}{2}}$$

وبرفع كلا الحدين في المعادلة للقوة $\frac{2}{3}$ نحصل على

$$\Longrightarrow \quad (5^3)^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Longrightarrow \quad (5\ )^{\frac{\cancel{3}}{1}\frac{2}{\cancel{3}}} = (x\ )^{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}}$$

$$\Longrightarrow \quad 5^2 = x$$

$$\Longrightarrow \quad x = 5^2$$

$$\Longrightarrow \quad x = 25$$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

مثال بسّط ما يلي: $\ln 27 - \ln 7 + \ln 14 - \ln 2$

$$\ln 27 - \ln 7 + \ln 14 - \ln 2 = \ln 27 - \ln 7 + (\ln 14 - \ln 2)$$

$$= \ln 27 - \ln 7 + \ln \frac{14}{2}$$

$$= \ln 27 - \cancel{\ln 7} + \cancel{\ln 7}$$

$$= \ln 27$$

تمارين للمراجعة

- حل المعادلات التالية:

1- $3^{x} = 3^{5x-6}$

2- $\log_2(x-7) = 3$

3- $\log_3 x = -2$

تمارين للمراجعة

- اختر الإجابة الصحيحة

إذا كان $3^{2x-1} - 9 = 0$ فإن قيمة x هي

a. $\frac{3}{2}$

b. $\frac{3}{5}$

c. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{-1}{2}$

تمارين الواجب للفصل الخامس

5-4

رقم الصفحة	رقم التمرين
378	1(4), 2(1), 3(2), 4(5, 8)
379	6
380	11

من كتاب مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها في
العلوم الإدارية والإنسانية الطبعة الحادية عشرة