



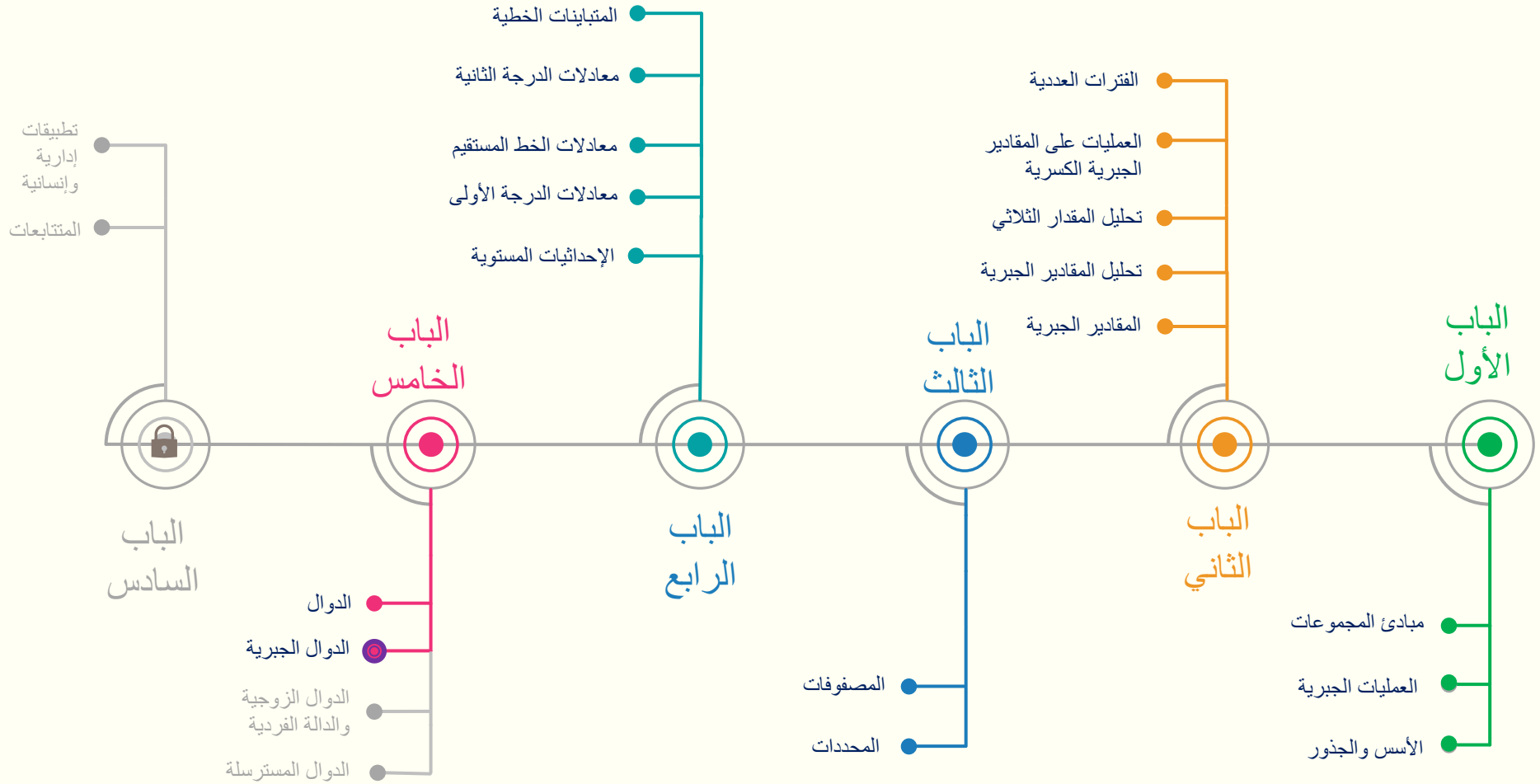
قسم الرياضيات  
Department of Mathematics

# MATH 111

الرياضيات للمسار الإداري والإنساني

إعداد قسم الرياضيات بجامعة الملك عبدالعزيز

الطبعة الثانية 1442 هـ - 2021 م





الطبعة الثانية 1442 هـ - 2021 م

قسم الرياضيات  
Department of Mathematics



## الباب الخامس : الدوال

### 5-2 الدوال الجبرية

# الدوال الجبرية

❖ **تعريف (الدالة الجبرية):** هي الدالة المكونة من كثيرات حدود مع استخدام العمليات الجبرية (الجمع والطرح والضرب والقسمة وأخذ الجذر وأخذ القوى)، وما عدا ذلك تسمى دوال مسترسلة (غير جبرية).

# أنواع الدوال الجبرية

## أولاً: دالة كثيرة الحدود

❖ تعريف (كثيرة الحدود): هي الدالة التي معادلتها على الصورة

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث  $a_n \neq 0$  و  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$

و  $n$  عدد صحيح أكبر من أو يساوى الصفر (أي أن  $n$  عدداً كلياً)، ويمثل  $n$  درجة كثيرة الحدود.

مجال جميع دوال كثيرات الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

# أشكال كثيرات الحدود

❖ تسمى الدالة

$$y = f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

دالة ثابتة أو كثيرة حدود من الدرجة الصفرية.

❖ تسمى الدالة

$$y = f(x) = ax + b, \quad a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$$

دالة خطية أو كثيرة حدود من الدرجة الأولى.

# أشكال كثيرات الحدود

❖ تسمى الدالة

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

دالة تربيعية أو كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

❖ تسمى الدالة

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

دالة تكعيبية أو كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.

# أولاً: دالة كثيرة الحدود

مثال

حدد ما إذا كانت الدوال التالية تمثل كثيرات حدود أم لا.

1)  $f(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + 1$

2)  $f(x) = 7x^2 + 12\sqrt{x}$

3)  $f(x) = 2x^{-2} - 3$

1)  $f(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + 1$

تمثل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

2)  $f(x) = 7x^2 + 12\sqrt{x}$

لا تمثل كثيرة حدود لوجود  $\sqrt{x}$  (أس المجهول ليس عدداً كلياً)

3)  $f(x) = 2x^{-2} - 3$

لا تمثل كثيرة حدود لوجود  $x^{-2}$  (أس المجهول ليس عدداً كلياً)



حدد ما إذا كانت الدوال التالية تمثل كثيرات حدود أم لا.

$$1) f(x) = \frac{x^{-2}}{5} + x^3 + 3$$

$$2) f(x) = \frac{2}{5} x^2 + 7$$

$$3) f(x) = e^3 x$$

$$1) f(x) = \frac{x^{-2}}{5} + x^3 + 3$$

لا تمثل كثيرة حدود وجود  $x^{-2}$  (أس المجهول ليس عدداً كلياً)

$$2) f(x) = \frac{2}{5} x^2 + 7$$

تمثل كثيرة حدود من الدرجة الثانية

$$3) f(x) = e^3 x$$

تمثل كثيرة حدود من الدرجة الأولى

# دالة كثيرة الحدود

إذا كانت  $f(x) = x^3 + 2x - 3$  ، فأوجد:  $f(-2)$

مثال

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 3 = -8 - 4 - 3 = -15$$

# ثانياً: دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

❖ تعريف (دالة القيمة المطلقة): هي الدالة التي معادلتها على الصورة:

$$y = |f(x)|$$

حيث  $f(x)$  دالة كثيرة حدود .

- مجال دالة المقياس هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

- ومداهها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بالإضافة إلى الصفر ويمكن تمثيلها

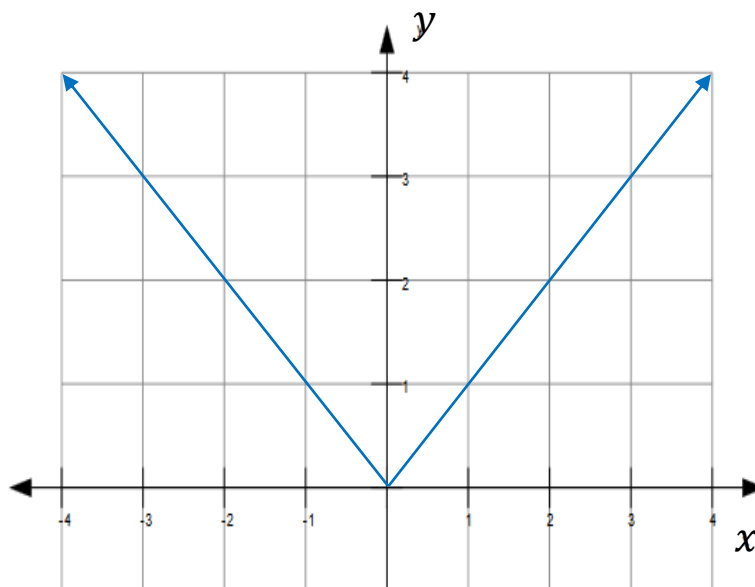
بالفترة التالية  $[0, \infty)$ .

# دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{الدالة}$$

مثال

تسمى دالة القيمة المطلقة للمتغير  $x$ .



# دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

إذا كانت  $f(x) = |x - 6|$ ، فأوجد:  $f(3)$

مثال

$$f(3) = |3 - 6| = |-3| = 3$$

## ثالثاً: الدالة الكسرية

❖ تعريف (الدالة الكسرية): هي الدالة التي معادلتها على الصورة :

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

حيث  $f(x)$  و  $g(x)$  دوال كثيرات حدود و  $g(x)$  ليست كثيرة حدود صفرية.

• مجال الدالة الكسرية هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  ما عدا قيم  $x$  التي تجعل

المقام  $g(x)$  يساوي صفرًا، أي أن المجال هو

$$\mathbb{R} - \{x: g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\text{أصفار المقام}\}$$

# الدالة الكسرية

هل الدالة التالية  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  تمثل دالة كسرية؟ وما هو مجالها؟

مثال

الدالة  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  تمثل دالة كسرية، ومجالها هو  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .

# الدالة الكسرية

**مثال** هل الدالة التالية  $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{x+5}$  تمثل دالة كسرية؟

الدالة  $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{x+5}$  لا تمثل دالة كسرية لأن البسط ليس كثيرة حدود لاحتوائه على  $\sqrt{x}$ .

**مثال** هل الدالة التالية  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^3+7}}$  تمثل دالة كسرية؟

الدالة  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^3+7}}$  لا تمثل دالة كسرية لاحتوائها على الجذر.



# الدالة الكسرية

**مثال** هل الدالة التالية  $f(x) = \frac{x^3-2}{x^{5/2}+7}$  تمثل دالة كسرية؟

الدالة  $f(x) = \frac{x^3-2}{x^{5/2}+7}$  لا تمثل دالة كسرية لأن المقام ليس كثيرة حدود لاحتوائه على  $x^{5/2}$ .

**مثال** هل الدالة التالية  $f(x) = \frac{|x^2-5|}{2x+3}$  تمثل دالة كسرية؟

الدالة  $f(x) = \frac{|x^2-5|}{2x+3}$  لا تمثل دالة كسرية لأن البسط ليس كثيرة حدود لاحتوائه على المقياس  $|x^2 - 5|$ .

# الدالة الكسرية

مثال إذا كانت  $f(x) = \frac{x+5}{x-1}$  فأوجد:  $f(0)$

$$f(0) = \frac{(0) + 5}{(0) - 1} = \frac{5}{-1} = -5$$

مثال إذا كانت  $f(x) = \frac{x-5}{x^3+8}$  فأوجد:  $f(-2)$

$$f(-2) = \frac{(-2) - 5}{(-2)^3 + 8} = \frac{-7}{-8 + 8} = \frac{-7}{0}$$

إذاً الدالة غير معرفة عند  $x = -2$  لأن المقام عندها يساوي صفراً.

# الدالة الكسرية

□ لإيجاد مجال الدالة الكسرية نتبع الخطوات التالية:

- i. نساوي المقام بالصفر.
- ii. نحلل المقام إن احتجنا لذلك.
- iii. نوجد قيم  $x$  التي تجعل المقام تساوي صفرًا وتسمى أصفار المقام.
- iv. {أصفار المقام} -  $\mathbb{R}$  = المجال

# الدالة الكسرية

مثال

عَيّن مجال الدالة الكسرية  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ .

نساوي المقام بالصفر فنحصل على:

$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

إذا المجال هو

$$\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

## رابعاً: الدالة الجذرية

❖ تعريف (الدالة الجذرية): هي الدالة التي معادلتها على الصورة:

$$y = \sqrt[n]{f(x)}$$

بحيث  $f(x)$  كثيرة حدود و  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ .

• مجال الدالة الجذرية هو جميع قيم  $x$  بحيث أن  $f(x) \geq 0$  إذا كان  $n$  عدداً

زوجياً أما إذا كان  $n$  عدداً فردياً فإن المجال هو  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

# الدالة الجذرية

إذا كانت  $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$ ، فأوجد:  $f(-4)$

مثال

$$f(-4) = \sqrt[3]{-4-4} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

# الدالة الجذرية

هل الدالة التالية  $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 3}$  تمثل دالة جذرية؟

مثال

نعم تمثل دالة جذرية.

هل الدالة التالية  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x+2}} - x + 3$  تمثل دالة جذرية؟

مثال

لا تمثل دالة جذرية لأن ما تحت الجذر (دالة كسرية) وليست كثيرة حدود.

# الدالة الجذرية

هل الدالة التالية  $f(x) = \sqrt{|x + 1|}$  تمثل دالة جذرية؟

مثال

الدالة  $f(x) = \sqrt{|x + 1|}$  لا تمثل دالة جذرية لأن ما تحت الجذر (دالة المقياس) وليست كثيرة حدود.



# الدالة الجذرية

هل الدالة التالية  $f(x) = \sqrt{x+3}$  تمثل دالة جذرية؟ وما هو مجالها؟

مثال

نعم تمثل دالة جذرية. وبما أن دليل الجذر 2 عدد زوجي فإن مجالها هو جميع القيم  $x$  التي تجعل ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر أي أن

$$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

$$\text{المجال} = [-3, \infty)$$

# الدالة الجذرية

هل الدالة التالية  $f(x) = \sqrt[6]{x-5}$  تمثل دالة جذرية؟ وما هو مجالها؟

مثال

نعم تمثل دالة جذرية. وبما أن دليل الجذر 6 عدد زوجي فإن مجالها هو جميع القيم  $x$  التي تجعل ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر أي أن

$$x - 5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 5$$

$$\text{المجال} = [5, \infty)$$

# الدالة الجذرية

هل الدالة التالية  $f(x) = \sqrt[3]{x+6}$  تمثل دالة جذرية؟ وما هو مجالها؟

مثال

نعم تمثل دالة جذرية.

المجال =  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  لأن دليل الجذر 3 عدد فردي.

# الدالة الجذرية

هل الدالة التالية  $f(x) = \sqrt{1-x}$  تمثل دالة جذرية؟ وما هو مجالها؟

مثال

نعم تمثل دالة جذرية. وبما أن دليل الجذر 2 عدد زوجي فإن مجالها هو جميع القيم  $x$  التي تجعل ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر أي أن

$$1 - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 1$$

$$\text{المجال} = (-\infty, 1]$$

# العمليات على الدوال

إذا كانت لدينا دالتين  $f, g$  فإن

$$1) (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$2) (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$3) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

# العمليات على الدوال

مثال إذا كان

$$f(x) = 3x + 1$$

$$g(x) = x + 2$$

فأوجد كلاً من:

1)  $(f + g)(x)$

4)  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

2)  $(f - g)(x)$

5)  $(f + g)(-1)$

3)  $(f \cdot g)(x)$

6)  $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$

# العمليات على الدوال

الحل

$$f(x) = 3x + 1$$

$$g(x) = x + 2$$

$$1) (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 1 + x + 2 = 4x + 3.$$

$$2) (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x + 1) - (x + 2) = 2x - 1.$$

$$3) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x + 1) \cdot (x + 2) = 3x^2 + 7x + 2.$$

# العمليات على الدوال

الحل

$$f(x) = 3x + 1$$

$$g(x) = x + 2$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+1}{x+2}.$$

$$5) (f + g)(-1) = 4(-1) + 3 = -4 + 3 = -1.$$

$$6) \left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{3(0)+1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$





5-2

## تمارين الواجب للفصل الخامس



رقم التمرين	رقم الصفحة
1 (2), 3(2,5)	344
6, 9	345
13	346
16	347

من كتاب مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والإنسانية الطبعة الحادية عشرة

