قسم الرياضيات

Department of Mathematics

MATH 111

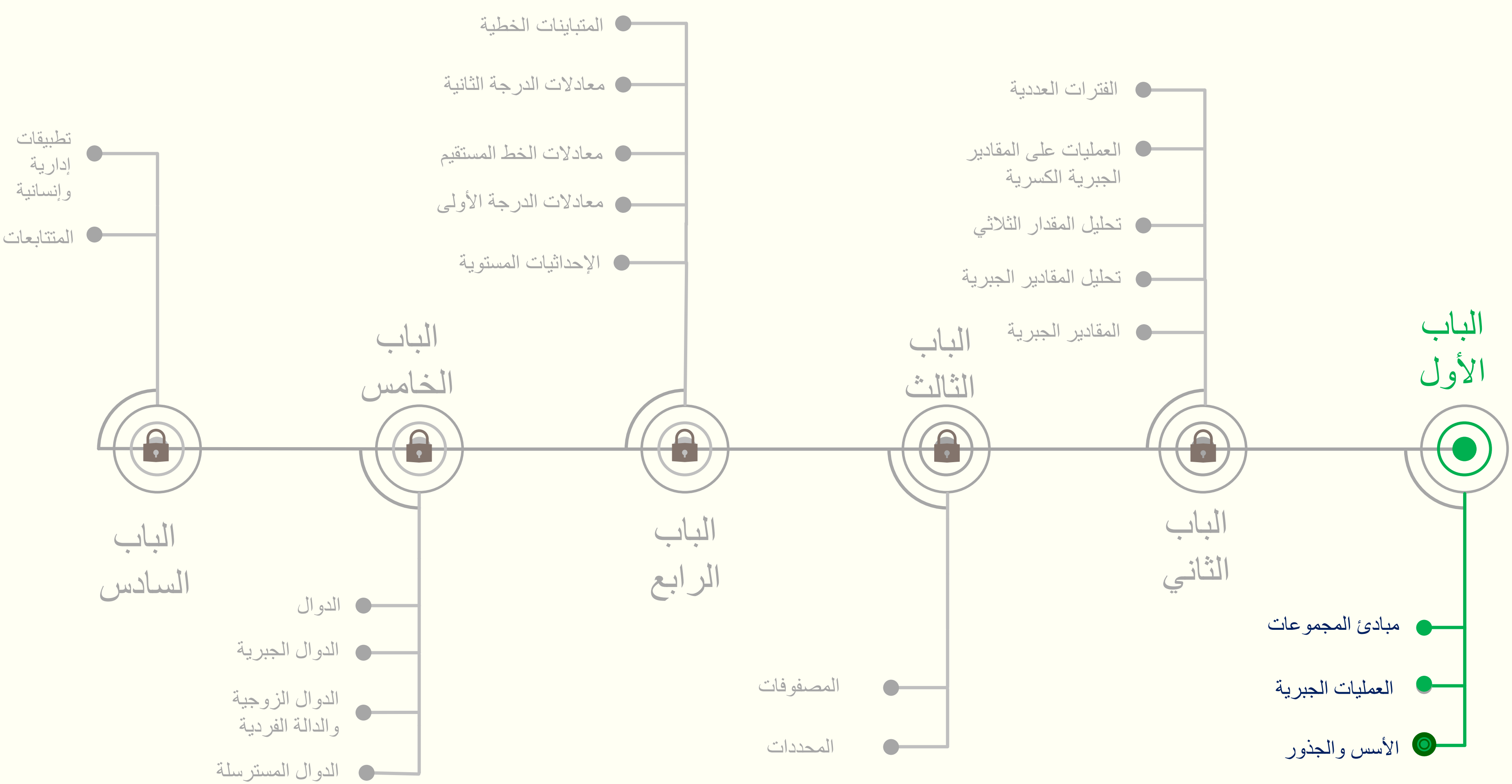
الرياضيات للمسار الإداري والإنساني

إعداد قسم الرياضيات بجامعة الملك عبدالعزيز

الطبعة الثانية 1442هـ - 2021م

الكتاب المقرر للمادة

الطبعة الثانية 1442هـ - 2021م



قسم الرياضيات
Department of Mathematics

الطبعة الثانية 1442هـ - 2021م

الباب الأول : مفاهيم أساسية في الجبر

1-3 الأسس والجذور

الأسس

❖ أولاً تعريف (الأسس) : نفرض أنّ x عدداً حقيقياً وكان n صحيحاً فإن:

١- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإنّ:

$$x^n = \overbrace{(x)(x)\dots(x)}^{n\ \text{من المرات}}$$

٢- إذا كان $n = 0$ فإنّ

$$x^0 = 1 \quad , \qquad x \neq 0$$

٣- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإنّ :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad , \qquad x \neq 0$$

حيث x يسمى الأساس وَ n يسمى الأس.

الأسس

مثال

(1) $x^3 = (x)(x)(x)$

(2) $(7)^6 = (7)(7)(7)(7)(7)(7)$

(3) $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$

(4) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

الأسس

مثال

(a) $3^0 = 1$

(b) $(-11)^0 = 1$

(c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

(d) $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{7}{5}\right)^0 = 1$

(e) 0^0 (كمية غير معينة)

الأسس

مثال

(a) $(7)^{-3} = \frac{1}{7^3}$

(b) $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$

(c) $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$

خواص الأسس

خاصية (1) :

إذا كان x عدداً حقيقياً بحيث $x \neq 0$ وكان m وَ n عددين صحيحين فإنّ:

$$x^n\, x^m = x^{n+m}$$

مثال

(1) $x^3\, x^4 = x^{3+4} = x^7$

(2) $x^{-2}\, x^5 = x^{-2+5} = x^3$

(3) $(3x+5)^6\,(3x+5)^4 = (3x+5)^{6+4} = (3x+5)^{10}$

خواص الأسس

خاصية (2) :

إذا كان x عدداً حقيقياً بحيث $x \neq 0$ وكان m وَ n عددين صحيحين فإن:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

مثال

$$(1) \quad \frac{x^3}{x^8} = x^{3-8} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

$$(2) \quad \frac{9^{-7}}{9^{-11}} = 9^{(-7)-(-11)} = 9^{-7+11} = 9^4$$

$$(3) \quad \frac{(x-2)}{(x-2)^7} = (x-2)^{1-7} = (x-2)^{-6} = \frac{1}{(x-2)^6}$$

خواص الأسس

خاصية (3) :

إذا كان x عدداً حقيقياً بحيث $x \neq 0$ وكان m وَ n عددين صحيحين فإن:

$$\boldsymbol{(x^m)^n = x^{mn}}$$

مثال

(1) $(x^2)^3 = x^{(2)(3)} = x^6$

(2) $(x^{-4})^5 = x^{(-4)(5)} = x^{-20} = \dfrac{1}{x^{20}}$

(3) $\left((2x-3)^{-4}\right)^2 = (2x-3)^{(-4)(2)} = (2x-3)^{-8} = \dfrac{1}{(2x-3)^8}$

خواص الأسس

خاصية (4) : إذا كان x وَ y عددين حقيقين بحيث $x \neq 0$ وَ $y \neq 0$ وكان n عدداً صحيحاً فإن:

$$(xy)^n = x^n y^n$$

مثال

(1) $(3ab)^4 = 3^4 a^4 b^4 = 81 a^4 b^4$

(2) $(x^3 y^2)^5 = (x^3)^5 (y^2)^5 = x^{15} y^{10}$

(3) $(x^{-2} y^5)^{-3} = (x^{-2})^{-3} (y^5)^{-3} = x^6 y^{-15} = \dfrac{x^6}{y^{15}}$

(4) $(-2x^2 y^{-3})^{-3} = (-2)^{-3} x^{-6} y^9 = \dfrac{y^9}{(-2)^3 x^6} = \dfrac{y^9}{-8x^6} = -\dfrac{y^9}{8x^6}$

خواص الأسس

خاصية (5) : إذا كان x وَ y عددين حقيقين وكان n عدداً صحيحاً فإن:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}\ , y \neq 0$$

ملاحظة: إذا كانت n عدداً صحيحاً سالباً فإن $x \neq 0$

مثال

(1) $$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$$

(2) $$\left(\frac{3}{-2}\right)^5 = \frac{3^5}{(-2)^5} = \frac{243}{-32} = -\frac{243}{32}$$

(3) $$\left(\frac{-2x^2}{y^5}\right)^3 = \frac{(-2)^3\left(x^2\right)^3}{(y^5)^3} = \frac{-8x^6}{y^{15}} = -\frac{8x^6}{y^{15}}$$

خواص الأسس

ملاحظة

إذا كان a وَ b عددين حقيقين بحيث $a, b \neq 0$ وكان m وَ n عددين طبيعيين فإن:

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^{m}}{a^{n}}$$

مثال

$$(1) \quad \frac{4^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^{2}}{4^{3}} = \frac{25}{64}$$

$$(2) \quad \frac{3^{-5}}{4^{-2}} = \frac{4^{2}}{3^{5}} = \frac{16}{243}$$

خواص الأسس

ملاحظة

إذا كان a وَ b عددين حقيقين بحيث $a, b \neq 0$ وكان m عدداً طبيعياً فإن:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$$

مثال

$$(1)\quad \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3}$$

$$(2)\quad \left(\frac{2x}{3y}\right)^{-4} = \left(\frac{3y}{2x}\right)^{4}$$

خواص الأسس

القوة لا تتوزع على
الجمع و الطرح

ملاحظة إذا كان $a, b \neq 0$ فإن

1) $(a+b)^n \neq a^n + b^n, \qquad n \neq 1$

2) $(a-b)^n \neq a^n - b^n, \qquad n \neq 1$

تمارين للمراجعة

بسّط التالي:-

1) 4^{-10}

2) $\frac{x^{-3}y^{-8}}{z^{-10}}$

3) $\left(\frac{45x^{-4}y^{2}}{9z^{-8}}\right)^{-3}$

4) $(6x^{-3}y^{5})(-7x^{2}y^{-9})$

5) $\frac{y^{-24}}{y^{-21}}$

6) $(-5c^{-1}d^{-2})^{-2}$

تمارين للمراجعة

أحسب التالي:-

1) $8(5-3)^3-20$

2) $\left(\frac{10\div(8-6)+9\times4}{2^5+3^2}\right)^{-3}$

3) $\left[\left(\frac{x^r}{y^t}\right)^2\left(\frac{x^{2r}}{y^{4t}}\right)^{-2}\right]^{-3}$

الجذور

❖ **تعريف (الجذور):** يسمى العدد x الجذر النوني للعدد a إذا كان $x^n = a$ حيث n عدد طبيعي أكبر من الواحد وَ $x, a \in \mathbb{R}$ ويُكتب :

$$\boldsymbol{x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

ونُسمّي العدد n دليلاً للجذر.

مثال

(a) $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$

(b) $\sqrt[3]{-1000} = -10$

الجذور

ملاحظة 1

يُسمى $\sqrt{a}$ الجذر التربيعي للعدد a

يُسمى $\sqrt[3]{a}$ الجذر التكعيبي للعدد a

ملاحظة 2

لتكن n عدداً زوجياً وكان لدينا $\sqrt[n]{a}$ فإن الجذر معرّف في $\mathbb{R}$ إذا كان $a \geq 0$ وغير معرّف في $\mathbb{R}$ إذا كان $a < 0$.

مثال

(a) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

(b) $\sqrt{-11}$ (غير معرّف في $\mathbb{R}$)

(c) $\sqrt[6]{-64}$ (غير معرّف في $\mathbb{R}$)

(d) $\sqrt[5]{-243}$ (معرّف في $\mathbb{R}$)

أمثلة على بعض جذور الأعداد

أمثلة للجذر الثاني
$\sqrt{1} = 1$
$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{49} = 7$

أمثلة للجذر الثالث
$\sqrt[3]{1} = 1$
$\sqrt[3]{-1} = -1$
$\sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt[3]{-8} = -2$
$\sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[3]{-27} = -3$
$\sqrt[3]{64} = 4$
$\sqrt[3]{-64} = -4$

أمثلة للجذر الرابع		
$\sqrt[4]{256} = 4$	$\sqrt[4]{81} = 3$	$\sqrt[4]{16} = 2$

خواص الجذور

خاصية (1) :

إذا كان x عدداً حقيقياً وكان n عدداً طبيعياً زوجياً فإن:

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|$$

مثال

(1) $\sqrt{x^2} = |x|$

(2) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = |3| = 3$

(3) $\sqrt[8]{y^8} = |y|$

(4) $\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2$

خواص الجذور

خاصية (2) :

إذا كان x عدداً حقيقياً وكان n عدداً طبيعياً فردياً أكبر من أو يساوي 3 فإن:

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

مثال

$$(1)\quad \sqrt[7]{x^7} = x$$

$$(2)\quad \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

$$(3)\quad \sqrt[3]{8^3} = 8$$

خاصية (3) :

إذا كان x وَ y عددين حقيقيين وَكان n عدداً طبيعياً أكبر من الواحد فإن

$$\sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x}\;\sqrt[n]{y}$$

أما في حالة كون n عدداً زوجياً فإن $x \geq 0$ وَ $y \geq 0$.

مثال

(1) $\sqrt[3]{27\,x^3} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{x^3} = 3\sqrt[3]{x^3} = 3x$

(2) $\sqrt{9\,x^2} = \sqrt{9}\,\sqrt{x^2} = 3|x|$

(3) $\sqrt[5]{-7}\,\sqrt[5]{-7} = \sqrt[5]{(-7)(-7)} = \sqrt[5]{(-7)^2} = \sqrt[5]{49}$

(4) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(2)(2)(2)} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(5) $\sqrt[3]{8\,y^{-6}} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{y^{-6}} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{(y^{-2})^3} = 2y^{-2} = \dfrac{2}{y^2}$

خاصية (4) :

إذا كان x وَ y عددين حقيقيين وكان n عدداً طبيعياً أكبر من الواحد فإن

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad , \qquad y \neq 0$$

بشرط أن تكون $x \geq 0$ وَ $y > 0$ إذا كانت n عدداً زوجياً.

مثال

(1) $$\sqrt{\frac{9\ x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{9}\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{\sqrt{3^2}\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{3\ |x|}{|y|}$$

(2) $$\sqrt{\frac{9x^4}{y^6}} = \frac{\sqrt{9x^4}}{\sqrt{y^6}} = \frac{\sqrt{9}\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^6}} = \frac{\sqrt{3^2}\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{(y^3)^2}} = \frac{3x^2}{|y^3|}$$

خاصية (5) :

إذا كان x عدداً حقيقياً وكان n وَ m عددين طبيعيين أكبر من الواحد فإن

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = x^{\frac{m}{n}}$$

بشرط أن تكون $x > 0$ في حالة n عدداً زوجياً. **مهم!!**

مثال

(1) $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$

(2) $\sqrt[3]{x^6y^6} = x^{\frac{6}{3}}\, y^{\frac{6}{3}} = x^2y^2$

(3) $\sqrt{y^{14}} \neq y^7$ لأنه قد تكون $y < 0$

(4) $\sqrt{y^{14}} = |\, y^7|$ لماذا؟!!

مثال

(1) $\sqrt[3]{8\,x^9y^{12}} = \sqrt[3]{2^3(x^3)^3(y^4)^3} = 2x^3y^4$

(2) $\sqrt[4]{\dfrac{16\,x^4}{y^{-8}\,w^{12}}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[4]{y^{-8}}\,\sqrt[4]{w^{12}}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^4}\,\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[4]{(y^{-2})^4}\,\sqrt[4]{(w^3)^4}} = \dfrac{2|x|}{|y^{-2}||w^3|} = \dfrac{2|x|}{y^{-2}\,|w^3|} = \dfrac{2|x|y^2}{|w^3|}$

(3) $\sqrt[3]{8\,x^9y^{-6}} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{x^9}\,\sqrt[3]{y^{-6}} = \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{(x^3)^3}\,\sqrt[3]{(y^{-2})^3} = 2x^3y^{-2} = \dfrac{2x^3}{y^2}$

خاصية (6) :

إذا كان x عدداً حقيقياً وكان n وَ m عددين طبيعيين أكبر من الواحد فإن

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

بشرط أن تكون $0 < x$ في حالة n أو m عدداً زوجياً.

مثال

$$(1) \quad \sqrt[3]{\sqrt[7]{x}} = \sqrt[(3)(7)]{x} = \sqrt[21]{x}$$

$$(2) \quad \sqrt[4]{\sqrt[6]{x}} = \sqrt[(4)(6)]{x} = \sqrt[24]{x}$$

خواص الجذور

ملاحظة

1) $\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$

2) $\sqrt[n]{x-y} \neq \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$

تمارين للمراجعة

بسّط التالي:-

1) $\sqrt[4]{5}\,\sqrt[4]{4}$

2) $\sqrt{216x^5y^3}$

3) $(4\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-5\sqrt{2})$

4) $x^{5/6}\,x^{2/3}$

5) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$

6) $\sqrt{x^2-4x+4}$

7) $8\sqrt{2x^2}-6\sqrt{20x}-5\sqrt{8x^2}$

8) $9^{\frac{3}{4}}\left(9^{\frac{2}{3}}+9^{\frac{4}{3}}\right)$

9) $\sqrt{9^3\,\sqrt[3]{9^2}}$

10) $\dfrac{\sqrt[4]{(x+y)^2}\,\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt{(x+y)^3}}$

تمارين الواجب للفصل الأول

1-3

رقم الصفحة	رقم التمرين
70	4
71	6, 8
72	16

من كتاب مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والإنسانية الطبعة الحادية عشرة