الباب الثالث

افتراضات نظرية الكم

Postulates of The Quantum Theory

- مقدمة
- افتراضات نظرية الكم
- ملاحظات متممة
- تمارين

٣-١ مقدمة

هناك فترات في تاريخ الإنسانية شهدت أسسًا وقواعد ونظريات علمية جديدة هزت المفاهيم الراسخة في الأذهان، وأجبرت العلماء على مراجعة النتائج والتجارب في ظل هذه الأسس العلمية الجديدة. وفي نهاية الربع الأول من القرن العشرين وبالتحديد الفترة من ١٩٢٤-١٩٢٦م قد شهدت إحدى تلك الثورات العلمية العنيفة التي صاحبت بزوغ نظرية الكم. وصاحب هذا البزوغ تغير تام في مفاهيم العلماء للأشياء وأصبح كل فرض علمي أو نتيجة من النتائج في حاجة إلى شرح وتعليل في ضوء هذه النظرية الحديثة. حيث غيرت هذه النظرية تماما نظرة العلماء للقوانين الطبيعية، واستحدثت لغة علمية جديدة في أغلب فروع العلوم الأساسية.

ظهرت هذه النظرية الحديثة على يد شرودينجر (Erwin Schrodinger) في صورة معادلات تفاضلية تتحكم في الطبيعة الموجية للجسيمات، وسميت ميكانيكا الموجات (wave mechanics). وفي نفس الوقت تقريبًا أخرج هيزنبرج (Werner Heisenberg)- معتمدًا أساسًا على جبر المصفوفات - نظرية تعتمد مبدأ الكم في صورة رياضة بحتة، سميت ميكانيكا المصفوفات (matrix mechanics). تلى ذلك مباشرة ديراك (P.A.M. Dirac) الذي طبق قواعد النسبية واستحدث ما سمي جبر الكم النسبيى (relativistic quantum algebra). وقد ثبت أن هذه الطرق الثلاثة ما هي إلا تعبيرات مختلفة عن نفس النظرية التي جمعت كل هذه الاتجاهات وسميت بصفة عامة ميكانيكا الكم (quantum mechanics).

وحيث إن نظرية الكم ما هي إلا إطار رياضي بحت - والمعنى الفيزيائى للأشياء ارتبط بالتطبيق أساسًا - فإننا سوف نقدم للطالب في هذا الكتاب المفاهيم

الأساسية لهذه النظرية في صورة مجموعة من الافتراضات (postulates). وهذا التقديم يناسب نظرية الكم كفرع جديد من العلوم لا يعتمد بالدرجة الأولى على معارف سابقة. وعلى الطالب أن يتقبل هذه الافتراضات ويتفهم المعنى المباشر لها بدون أن يتساءل عن مصدرها أو إثبات لها. وستثبت صحة هذه الافتراضات أو خطؤها عند التطبيق، فإذا تطابقت النتائج العملية مع تلك المحسوبة نظريًا فذلك إثبات لصحة هذه الافتراضات والعكس صحيح.

٣-٢ افتراضات نظرية الكم Postulates of the Quantum Theory

إن افتراضات أي نظرية علمية هي مجموعة المبادئ العلمية الأساسية التي تبنى عليها النظرية وعلى الطالب أن يتقبل هذه الافتراضات في المرحلة الأولى من هذه النظرية. وهذه الافتراضات لا يمكن شرحها بأسس أكثر أولية منها، وإلا كانت هذه الأسس هي افتراضات بعينها. ومن ناحية أخرى، وحيث إن ميكانيكا الكم هي منطق رياضي لدراسة الخواص الذرية والجزيئية، وبالتالي بعيدة تمامًا عن معارفنا اليومية، فإن الافتراضات التي سوف نقدمها هنا سوف تبدو و لأول وهلة صعبة الفهم. ويجب أن نضع في أذهاننا أن صحة هذه الافتراضات تكمن في قدرتها على استنباط وتعليل النتائج العلمية والمدى الذي يمكن أن تطبق فيه.

٣-٢-١ الافتراض الأول: حالة النظام ودالة الموجة

State of the System and Wave Function

إن حالة نظام ما يمكن وصفها وصفًا كاملاً باستخدام دالة رياضية يرمز لها بالرمز Ψ. هذه الدالة هي دالة في الإحداثيات وفي الزمن، وتسمى دالة الحالة (state function) أو دالة الموجة (wave function) وهذه الدالة تحتوى على جميع المعلومات الخاصة بالنظام.

ويطبق هذا الافتراض مبدأ الكم على النظام، حيث يفترض أن لهذا النظام عدة حالات محددة ومعروفة مسبقًا، كل حالة من هذه الحالات

قائمة بذاتها ومستقلة تمامًا عن الحالات الأخرى. و يمكن وصف النظام في إحدى هذه الحالات وصفًا رياضيًا باستخدام دالة حالة في إحداثيات النظام وفي الزمن $\Psi(x,y,z,t)$. وتحتوي هذه الدالة بصورة ما على جميع المعلومات (الخواص) الخاصة بالنظام. ويمكن النظر إلى Ψ على أنها تجريد رياضي لحالة النظام (mathematical abstraction) وإذا كانت خواص النظام في إحدى حالاته لا تتغير بالزمن، فإنه يقال أن النظام في حالة ساكنة (stationary state) ويطلق على الدالة Ψ في هذه الحالة اسم دالة الموجة للحالة الساكنة (stationary state wave function) ودالة الموجة في حد ذاتها ليس لها معنى فيزيائي، والمعنى الوحيد المرتبط بها هو أنها تجريد رياضي لحالة النظام. أما المعنى الفيزيائي، فإنه مرتبط بمربع هذه الدالة.

يمثل مربع الدالة Ψ^2 أو $\Psi\times\Psi^*$ (إذا كانت الدالة معقدة) عند زمن ما الاحتمالية (probability) وهذه الجزئية من الفرض الأول تحاول أن تضفي معنى لهذه الدالة. فإذا افترضنا أن النظام هو جسيم يتحرك في الاتجاه x، فإن مربع الدالة Ψ^2 عند النقطة x يمثل احتمالية وجود الجسيم عند هذه النقطة. أما إذا كنا نبحث عن الاحتمالية في المنطقة المتناهية الصغر الواقعة بين x و $x + dx$ فإنها تعطى بالتعبير:

$$\Psi^2\, dx \qquad (١-٣)$$

وحيث إن Ψ يمكن أن تكون دالة معقدة (complex)، وبالتالي فإن مربعها معقد أيضًا، فإننا لا يمكن أن نستخدم Ψ^2 لتمثيل الاحتمالية في حالة الدوال المعقدة لأن الاحتمالية لا بد وأن تكون حقيقية، وبالتالي فإنه في حالة الدوال المعقدة فإن المقدار الحقيقي يمكن الحصول عليه بضرب الدالة في مرافقها المعقد (راجع الباب الثاني). وعلى ذلك فإن التعبير (٣-١) يمكن أن يكتب كالآتي:

$$\Psi \times \Psi^* dx \qquad (٢-٣)$$

وهذه الصورة أعم حيث إنه في حالة الدوال الحقيقية (real) فإن المرافق المعقد ما هو إلا الدالة نفسها وبالتالي فإن التعبير (٣-٢) يتحول إلى التعبير (٣-١). وفي المثال السابق إذا سمح للجسيم بالتحرك في جميع الاتجاهات (x,y,z) فإن الاحتمالية في وحدة الحجم التفاضلي $(d\tau)$ حيث أن: $(d\tau = dxdydz)$ هي:

$$\Psi \times \Psi^* d\tau \qquad (٣-٣)$$

وبالطبع فإن مجموع هذه الاحتماليات في الفراغ كله لابد وأن يساوى الوحدة.

$$\int_{\text{allspace}} \Psi^* \Psi d\tau = 1 \qquad (٣-٤)$$

ويسمى التعبير (٣-٤) شرط التطبيع (normalization condition)، ويعنى أن الدالة Ψ دالة مطبعة تمامًا على كل الفراغ المسموح للنظام بالانتشار فيه. يطلق على الدالة التي تحقق هذا الشرط (٣-٤) بالدالة المطبعة (normalized wave function) والمعنى الفيزيائي المرتبط بمربع Ψ يضع علينا عبأً عند اختيارنا لهذه الدالة الموجية، والشرط الأساسي في اختيارنا للدالة (Ψ) هو أن تكون دالة حسنة السلوك (well-behaved) وهذا النوع من الدوال الرياضية له الخواص التالية:

أ- **أحادية القيمة (Single-Valued)**: أي أن الدالة لها قيمة واحدة فقط لكل قيمة من قيم المتغيرات التي تعتمد عليها.

ب- **مستمرة (Continuous)**: تغطى الفراغ المسموح لها بالتواجد فيه، والذي تحدده القيم القصوى للمتغيرات التي تعتمد عليها الدالة. وهذه الخاصية تعني في الحقيقة أكثر من ذلك، فلابد أن يكون المشتق الأول للدالة مستمرًا أيضًا.

ج- **محددة القيمة (Finite)**:وفي حدود دراستنا في هذا الكتاب فإن هذه الخاصية تعني أن الدالة لا يمكن أن تساوي ما لا نهاية عند أي نقطة في الفراغ.

مثال ٣-١

حدِّد ما إذا كانت أي من الدوال الآتية مقبولة أو غير ذلك كدالة حالة عبر الفواصل المشار إليها:

(أ) $e^{-x}(0,\propto)$

(ب) $e^{-x}(-\propto,\propto)$

(ج) $\sin^{-1}x(-1,1)$

(د) $\frac{\sin x}{x}(0,\propto)$

(هـ) $e^{-|x|}(-\propto,\propto)$

الحل

(أ) مقبولة، نظرًا لأن e^{-x} هي دالة مستمرة وذات قيمة واحدة محددة كما أنه يمكن تكامل مربعها عبر الفاصل $(0,\propto)$: $\#_{\%}^{a}(e^{-X})^{2}dx$

(ب) غير مقبولة، نظرًا لأن الدالة e^{-x} لا تحقق شرط التطبيع عبر الفاصل $(-\propto,\propto)$ نظرًا لأنها تنحرف إذا ما آلت X إلى $(-\propto)$.

(ج) غير مقبولة، نظرًا الدالة $\sin^{-1}x$ هي دالة متعددة القيم أي أنها تتخذ القيم $\sin^{-1}1=\frac{r}{2},\frac{r}{2}+2r,\frac{r}{2}+4r,..etc$ عند $x=1$

(د) مقبولة، نظرًا لأن للدالة $\frac{\sin x}{x}$ قيمة محددة عند $x=0$.

(هـ) غير مقبولة، نظرًا لأن التفاضل الأول للدالة $e^{-|x|}$ غير مستمر عند $x=0$

ولكي نفهم السبب وراء هذه الشروط لاختيار الدالة Ψ، فإننا لا بد أن نتذكر أن مربع Ψ عند أي نقطة يمثل احتمالية وجود النظام عند هذه النقطة، فإنه لا يمكن أن يكون للنظام أكثر من احتمالية واحدة عند النقطة الواحدة (شرط فردية القيمة). وحيث إن النظام منتشر في كل الفراغ، فإن الدالة لا بد أن تنتشر أيضًا في كل الفراغ حتى يمكن أن نحدد الاحتمالية في أي نقطة عند أي زمن (شرط الاستمرارية). ومن الناحية النظرية البحتة، فإن الاحتمالية عند أي نقطة في الفراغ يمكن أن تساوي أي قيمة حقيقية من الصفر إلى الواحد الصحيح، أي إن الاحتمالية (مربع Ψ) لابد وأن تكون محددة (finite).

ويمكن أن نخلص من هذه الفرضية بأن النظام له العديد من الحالات، وكل حالة من هذه الحالات، يمكن وصفها وصفًا تامًا بدالة موجة Ψ. أي أن Ψ ما هي إلا مجموعة كاملة (complete set) وعناصرها $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_n$ حيث Ψ_1 هي دالة الحالة "1" التي تحتوي على جميع المعلومات الخاصة بالنظام وهو في الحالة "1"، ولكن هذه الدالة لا تحتوى على أي معلومة عن النظام وهو في الحالة "2"، وهذه الحالة الأخيرة توصف وصفًا كاملاً بالدالة Ψ_2 وهكذا، أي إن Ψ_1 مستقلة تمامًا عن Ψ_2 ويمكن التعبير عن هذه الاستقلالية رياضيًا بالتعبير $\int_{\text{allspace}} \Psi_1\Psi_2 d\tau = 0$ أو بصورة أكثر شمولية:

(٣-٥)	$$\int_{\text{allspace}} \Psi_i \Psi_j d\tau = 0 \qquad i \neq j$$

وهـذا التكامل يسمى "شـرط التعامد" (orthogonality condition) وهـو يعبر عن استقلالية عناصر المجموعة Ψ عن بعضها البعض. وسوف نقدم إثباتًا رياضيًا لهذا الشرط بنهاية هذا الباب. أي إن Ψ تمثل مجموعة كاملة كل عنصر من عناصرها Ψ_i مطبع (normalized) (التعبير (٣-٤)) وأي زوج من عناصرها متعامد (orthogonal) (التعبير (٣-٥))، وعلى ذلك فإنها تسمى الزمرة المطبعة المتعامدة (orthonormal set).

$$\int \Psi_i \Psi_j d\tau = \delta_{ij} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

مثال ٣-٢

وضح بأن زمرة الدوال التي تضم: $\Psi_n = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{n\pi x}{a}, \Psi_m = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{m\pi x}{a}$

حيث $n = 1,2,3...$، $m = 1,2,3...$ ، تحقق خاصية التعامد المطبع عبر الفاصل (o,a)

الحل

يعبر عن خاصية التعامد المطبع (orthonormalty) بالعلاقة

$$\int_o^a \Psi_n(x)\ \Psi_m(x)dx = \delta_{nm}$$

حيث δ_{nm} هي دلتا كرونيكر التي تعرف كالآتي:

$\delta_{nm} = 0 \quad n \neq m$ ليتحقق شرط التعامد

$\delta_{nm} = 1 \quad n = m$ ليتحقق شرط التطبيع

نعوض عن قيم الدالتين في علاقة التعامد المطبع:

$$\left(\frac{2}{a}\right)\int_o^a \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} x \frac{a}{2} \delta_{nm}$$

إذًا لتحقيق شرط التعامد، نجعل $n \neq m$ ، ومن ثم فإن $\delta_{nm} = 0$

$$\int_o^a \Psi_n(x)\Psi_m(x)dx = 1x0 = 0$$

ولتحقيق شرط التطبيع نجعل $n = m$ ومن ثم فإن $\delta_{nm} = 1$

$$\int_o^a \Psi_n(x)\Psi_n(x)dx = \int_o^a \Psi_m(x)\Psi_m(x)dx = |x| = 1$$

تفسير دالة الموجه Ψ Interpretation of Ψ

لو أمكننا الحصول على دالة الحالة، فإنه يمكن أن نستنبط جميع خواص النظام في هذه الحالة. إن هذه المقولة رغم المجاز الموجود بها إلا أنها صحيحة إلى حد كبير. فالحصول على الدالة الموجية هو حجر الزاوية في تطبيق نظرية الكم على أي نظام. ومن هنا كان مجهود العلماء لتفهم المعنى الفيزيائي لهذه الدالة الموجية. وقد عقد بورن (born) مناظرة مع خواص الموجات الكهرومغناطيسية، فمن المعروف أن شدة الموجة (intensity I) تتناسب طرديًا مع مربع سعة (amplitute) الاهتزازة (ω^2).

$$I \propto \omega^2$$

(راجع الطبيعة المزدوجة للضوء - الباب الأول) ومن منظور الجسيمات للضوء، فإن شدة الموجة تعتمد أساسًا على عدد الفوتونات، فكلما زاد عدد الفوتونات (كل يحمل طاقة ثابتة تساوي h v) زادت شدة الموجة. وعلى ذلك عند سقوط موجة ضوئية على فيلم حساس، فإن الأجزاء ذات الكثافة الضوئية (d) الأعلى تعني سقوط عدد أكبر من الفوتونات عليها. وإذا أعيدت التجربة مرة أخرى باستخدام فوتون واحد، فإن احتمال سقوطه (ρ) في منطقة ما يرتبط بكثافة الضوء في هذه المنطقة، أي أن الاحتمالية ρ تتناسب مع الكثافة الضوئية d ($d \propto \rho$). وحيث إن هذه الأخيرة تتناسب مع الشدة I ($d \propto I$)، والتي بدورها تتناسب طرديًا مع مربع سعة الاهتزازة ω^2، فإننا يمكن أن نصل إلى النتيجة بأن مربع سعة الاهتزازة الموجية يتناسب مع الاحتمالية $\rho \propto \omega^2$. وحيث إن الجسيمات لها طبيعة موجية، فإنه يمكن تطبيق نفس المبدأ عليها. أي إن مربع Ψ عند أي نقطة يتناسب مع الاحتمالية عند هذه النقطة.

ومبدأ الاحتمالية من أهم المبادئ التي تختلف فيها ميكانيكا الكم عن الميكانيكا الكلاسيكية. فهذه الأخيرة تفترض أن قوانينها قادرة على تعيين مكان أي جسيم تعيينًا دقيقًا في أي زمن، في حين أن ميكانيكا الكم والتي تتعامل مع الطبيعة

الموجية للجسيمات تتفهم تمامًا أن أي موجة لا تشغل نقطة معينة في الفراغ (وإلا كانت جسيمًا)، إنما تنتشر في كل الفراغ المتاح لها. وبالتالي فإنها تشغل حيزًا وليس مكانًا بعينه. والموجة المنتشرة في هذا الحيز تشغله بكثافة ρ تختلف من نقطة إلى أخرى. وعلى ذلك فلا يجب أن نبحث عن المكان الذي تشغله الموجة، إنما نبحث عن كثافة الموجة (احتماليتها) في مكان ما من الحيز الذي تشغله. أي إنه غير مسموح في ميكانيكا الكم أن نتساءل أين الجسيم ؟ إنما المسموح به أن نتساءل ما هو احتمال وجود الجسيم في مكان ما؟

٣-٢-٢ الافتراض الثاني: مؤثرات ميكانيكا الكم والمشاهدات
Quantum Mechanical Operators and Observables

يقابل كل خاصية من خواص النظام مؤثر ميكانيكي كمي (quantum mechanical operator) يتصف بكونه خطى(linear) وهيرميشيان (Hermitian)، ويمكن استنباط القيمة العددية لهذه الخاصية من الخواص الرياضية لمؤثرها الكمي.

إن الافتراض الأول ربط بين حالة النظام ودالة الموجة التي تصف هذه الحالة. وعلى نفس المنوال، فإن الافتراض الثاني يربط بين كل خاصية من خصائص النظام ومؤثر كمي، حيث يمكن اختزال هذه الخاصية رياضيًا في صورة مؤثر كمي. وإذا تقبلت هذه الحقيقة، فإنه لا بد وأن تتوافر صفتان في هذا المؤثر الكمي، أولاهما أن يكون خطيًا، وقد سبق أن شرحنا معنى أن يكون المؤثر الرياضي خطيًا (راجع الباب الثاني) أما الخاصية الثانية فهي أن يكون المؤثر الكمي هيرميشيان (Hermitian). ويمكن تعريف هذه الخاصية للمؤثر $\hat{\alpha}$ بالتعبير:

$$\int f_1^* \hat{\alpha}\ f_2\ d\tau = \int f_2 \hat{\alpha}^* f_1^*\ d\tau \qquad (٣-٦)$$

حيث f_1, f_2 هما أي دالتين مقبولتين (acceptable) وهذه الخاصية لمؤثرات

ميكانيكا الكم في غاية الأهمية، لأنها هي التي سوف تؤكد لنا أن القيم العددية المعينة للخواص هي قيم حقيقية (real)، وسوف نقدم إثباتًا رياضيًا لهذه النقطة بنهاية هذا الباب.

مثال ٣-٣

اثبت أن مؤثر طاقة الحركة الذي يعطى بالعلاقة

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

هو هيرميشيان.

الحل

سوف نجعل هذا المؤثر يعمل على الدالة (f)، والتي تتلاشى في ما لا نهاية.

إذن سوف نستخدم طريقة التكامل بالأجزاء لإجراء هذه العملية حتى تتحقق المعادلة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^* A f dx = \int_{-\infty}^{\infty} f \hat{A}^* f^* dx$$

ونبدأ بتعويض $\hat{A} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ في المعادلة أعلاه.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{d^2}{dx^2} f dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\left| f^* \frac{d}{dx^2} \right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df^*}{dx}\frac{df}{dx} dx$$

حيث يتلاشى الحد الأول للطرف الأيمن لهذه المعادلة

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left| \frac{df^*}{dx} f \right|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 f^*}{dx^2} f dx$$

إذن نحصل على (بعد تلاشى الحد الأول لهذه المعادلة أيضًا):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right) f dx = \int_{-\infty}^{\infty} f \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right) f^* dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)^* f^* dx$$

إذن طالما تحققت المعادلة أعلاه فإن مؤثر طاقة الحركة هو هيرميشيان.

يقدم لنا الفرض الثاني قائمة من الخواص المختزلة في صورة رياضية سميت مؤثرات ميكانيكا الكم. ومن المفترض أننا قادرون على أن نستخلص القيمة العددية للخاصية بمجرد تطبيقنا للخواص الرياضية لمؤثرها الكمي. والسؤال الآن هو كيف نحصل على مؤثرات ميكانيكا الكم هذه؟ ويقدم لنا الفرض الثاني وصفة سريعة وسهلة للحصول على هذه المؤثرات.

أولاً: نكتب التعبير الكلاسيكي للخاصية (تبعًا لقوانين نيوتن وقوانين الفيزياء) بمعرفة الإحداثيات وكمية التحرك والزمن.

ثانيًا: نجرى التعديلات التالية:

١- الزمن والإحداثيات وكل دالة معتمدة عليهم تترك بدون أدنى تغيير.

٢- كمية التحرك P_q يتم استبداله بالمؤثر $-i\hbar\frac{d}{dq}$ حيث $\hbar=\frac{h}{2\pi}$

q هي إحداثي الحركة في اتجاه x , y أو z.

ولتوضيح ذلك نحاول أن نشتق المؤثر الكمي لطاقة الحركة لجسم كتلته m يتحرك بسرعة v m/s في اتجاه x. فأولاً نكتب التعبير الكلاسيكي لطاقة الحركة وهو

$$T_x = 1/2\, mv^2 \qquad (٣-٧)$$

وحيث إننا نبحث عن كمية التحرك P_x، فإننا نبدأ في تحوير هذا التعبير كالآتي:

$$T_x = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{P_x^2}{2m}$$

تستبدل كل P_x بالمؤثر الكمي $-i\hbar\dfrac{d}{dq}$

$$\hat{T}_x = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)$$

$$\hat{T}_x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \qquad (٨-٣)$$

والتعبير (٣-٨) هو المؤثر الكمي لطاقة الحركة في الاتجـاه x، وكما هو واضح يختلف التعبير الكمي (٣-٨) عن التعبير الكلاسيكي (٣-٧) في أن هذا الأخـير يمكن التعويض فيه بقيمة الكتلة (m) والسرعة (v)، وبالتالي يمكن الحصـول منه مباشرة على القيمة العـددية لطاقة الحـركة. أمـا المـؤثر الكمي (٣-٨) فلا يمكن التعويض فيه للحصول على قيمة (T_x)، إنما يدل على عملية رياضية وهي عملية التفاضل الثاني بالنسبة للمتغير (x)، والتي إذا أجريت على الدالة المناسبة يمكن الحصول على القيمة العددية لطاقة الحركة. ويمكن الحصول على تعبير مماثل للمعادلة (٣-٨) للحركة في الاتجاه y أو الاتجاه z. ترمز (d) للتفاضل الكلي بالنسبة (x).

$$\hat{T}_y = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2}$$

$$\hat{T}_z = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2}$$

وبالتالي فإن المؤثر الكمي لطاقة الحركة الكلية

$$\hat{T} = \hat{T}_x + \hat{T}_y + \hat{T}_z$$

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \qquad (٣-٩)$$

حيث تم استبدال المؤثر التفاضلي $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ بالرمز ∇^2 وتسمى دل تربيع، وهي عبارة عن مجموع التفاضلات الجزئية للمتغيرات x, y, z. ويجب أن نلاحظ هنا أنه ومع أننا قد اشتققنا التعبير (٣-٩) في الإحداثيات الديكارتية، إلا أنه يمكن اشتقاقه أيضا في أي من الإحداثيات الأخرى.

ومن أهم المؤثرات التي تهمنا في موضوع هذا الكتاب، نذكر مؤثر الطاقة الكلية (E) (total energy) للنظام. وقد تم وضع التعبير الكلاسيكي للطاقة الكلية بمعرفة العالم هاميلتون (Hamilton).

$$E = T + U \qquad (٣-١٠)$$

هذه المعادلة تسمى معادلة هاميلتون (Hamilton equation) حيث T هي طاقة الحركة و U هي طاقة الوضع. والآن هيا بنا نحاول اشتقاق المؤثر الكمي للطاقة الكلية ويرمز له بالرمز $\hat{H}$ ويسمى بمؤثر هاميلتون. ويمكن تمثيله بالتعبير:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} \qquad (٣-١١)$$

ومؤثر طاقة الحركة $\hat{T}$ قد سبق اشتقاقه ويعطى بالتعبير (٣-٩). أما $\hat{U}$ فإنه من المعلوم أن طاقة الوضع تعتمد على طبيعة الجسيمات، كما أنها دالة في الإحداثيات (المكان position) وتبعًا للطريقة المتبعة لاشتقاق المؤثرات، فإن مثل هذه الدوال تتحدد عندما يتم التعرف على طبيعة الجسيمات تترك بدون أدنى تغيير، ولذا يكتب التعبير الدال على الحالة كما هو. وعلى ذلك فإن المؤثر الهاملتوني يمكن كتابته بالصورة:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{U} \qquad (٣-١٢)$$

والجدول رقم (٣-١) يوضح بعض مؤثرات ميكانيكا الكم المهمة.

جدول (٣-١): بعض المؤثرات الكمية المهمة.

الخاصية	التعبير الكلاسيكي	المؤثر الكمي	عمل المؤثر
عزم ثنائي القطبية	Qr	qr	الضرب في qr
طاقة الوضع لحركة اهتزازية توافقية	$\frac{1}{2}kx^2$	$\frac{1}{2}kx^2$	الضرب في $\frac{1}{2}kx^2$
طاقة الوضع لشحنتين	q_1q_2 / r	q_1q_2 / r	الضرب في q_1q_2 / r
كمية التحرك الخطية في الإتجاه x	mv	$-i\hbar\frac{d}{dx}$	$-i\hbar\frac{d}{dx}$
طاقة الحركة	$1 / 2mv^2$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$
الموقع	x	$\hat{x}$	الضرب في X
كمية التحركة الزاوية	$L_x = yp_z - zp_y$ $L_y = zp_x - xp_z$ $L_z = xp_y - yp_x$	$\hat{L}_x$ $\hat{L}_y$ $\hat{L}_z$	$-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$ $-i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$ $-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$

القياسات في نظرية الكم Quantum Theory of Measurements

إن عملية القياس لتعيين خاصية ما ينظر إليها من المنظور الكمي نظرة مختلفة تمامًا عن النظرة الكلاسيكية. فتبعًا لنظرية الكم يمكن تقسيم خواص أي نظام إلى نوعين أساسيين.

١- الخواص الحادة (المشاهدات) Sharp Properties (Observables)

يمكن تعريف الخاصية الحادة بأنها تلك الخاصية التي لا تتغير قيمتها العددية بتغير الزمن أو مكان القياس (إحداثيات النظام). أي إنه إذا تم قياس القيمة العددية لخاصية ما عددًا كبيرًا جدًا من المرات، فإننا سوف ننتهي في كل مرة بنفس القيمة العددية للخاصية بدون أدنى تغيير. هذه القيمة العددية تسمى القيمة

المطلقة (absolute value) للخاصية. وطريقة تعيين هذه القيم المطلقة هي مجال الافتراض الثالث من فروض نظرية الكم.

٢- **الخواص غير الحادة للمشاهدات Non-sharp Properties of Observables**

والخاصية غير الحادة هي تلك الخاصية التي تتغير قيمتها العددية بتغير الزمن أو مكان النظام عند إجراء القياس. فإننا لو أجرينا عددًا كبيرًا جدًا من محاولات قياس القيمة العددية لخاصية من هذا النوع، فإننا ننتهي في كل مرة بقيمة مختلفة عن القيم الأخرى المعينة لنفس الخاصية. وبالتالي فإن هذه الخاصية ليس لها قيمة مطلقة، والممكن هو تعيين قيمة متوسطة (mean value) أو (average value) لهذه الخاصية. وكيفية حساب هذا المتوسط هو مجال الافتراض الخامس من افتراضات نظرية الكم.

٣-٢-٣ الافتراض الثالث: القيم المطلقة للمشاهدات: Absolute Values of Observables

إن القيم الممكن الحصول عليها كنتيجة لقياس خاصية ما هي القيم الذاتية للمعادلة:

$$\propto \Psi_i = a_i\ \Psi \qquad (١٣-٣)$$

حيث Ψ_iهي دالة الحالة (i) للنظام $\propto$ وهو المؤثر الكمي المقابل للخاصية المقاسة.

ويقدم هذا التعبير عن الافتراض الثالث طريقة تعيين القيم المطلقة للخواص الحادة. فإذا أردنا أن نعين القيمة المطلقة لخاصية ما، فإننا يجب أن نحصل أولاً على المؤثر الكمي المقابل لهذه الخاصية. ثم يلي ذلك تطبيق العملية الرياضية لهذا المؤثر على دالة حالة النظام. وكما يقرر الافتراض الثالث، فإن نتيجة هذه العملية الرياضية هي خروج دالة الحالة بدون أدنى تغيير مضروبة في مقدار ثابت. هذا الثابت هو القيمة العددية المطلوبة. وتتحقق معادلة الحالة الذاتية (٣-١٣) في حالة

ما إذا كانت الخاصية من النوع الحاد فقط. أو نستطيع أن نعبّر عن ذلك بطريقة عكسية، فنقول الخاصية التي يمكن تعيينها بهذه الطريقة هي خاصية حادة. فإذا كانت دالة الحالة دالة ذاتية للمؤثر الكمي المقابل للخاصية المطلوبة، فإن هذه الخاصية هي خاصية حادة. فإذا أردنا مثلاً أن نعين قيمة الطاقة الكلية لنظام ما فإننا نطبق المعادلة (٣-١٣) بالنسبة للمؤثر الكمي للطاقة (الهملتوتيان) وهو مؤثر هاميلتون كالآتي:

$$H\Psi = E\Psi \qquad (٣-١٤)$$

ويصبح المطلوب هو تعيين القيمة الذاتية لهذا المؤثر الهاملتوني. يمكن كتابة معادلة الجسيم الواحد (٣-١٤) كالآتي:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \widehat{U}\right)\Psi = E\,\Psi \qquad (٣-١٥)$$

هذه المعادلة الأخيرة هي معادلة شرودنجر الموجية (Schrodinger wave equation) وهـي المعادلة المركزية الأساسية في نظرية الكم. وحتى تكون القيمة العددية لخاصية ما قيمة ثابتة ودقيقة عند قياسها على مجموعة كبيرة من الأنظمة المتماثلة (identical systems) فلابد من وصف النظام بدالة Ψ تكون دالة ذاتية للمؤثر الكمي لهذه الخاصية. ومعنى ذلك أن الخواص الحادة لا تعطي توزيعًا حسابيًا (distribution) للقيم المعينة لها، إنما قيمة واحدة فقط تتكرر في كل مرة يتم فيها إجراء القياس. هذه القيمة هي القيمة الذاتية للمعادلة (٣-١٣). ولتوضيح ذلك نفترض مجموعتي النتائج التالية:

أ) 7 , 6, 5 و ب) 6 , 6 , 6

كل من المجموعتين لهما نفس المتوسط الحسابي (average value) ولكن المجموعة (أ) تعطي توزيعا حسابيا في حين أن المجموعة (ب) تعطي قيمة ثابتة في كل مرة. وللتفريق بين المجموعتين، يلاحظ أنه بالنسبة للمجموعة (أ) فإن متوسط

المربعات (٣٦,٧) لا يساوى مربع المتوسط الحسابي (٣٦) في حين أن كليهما متساو بالنسبة للمجموعة (ب). وستتضح أهمية هذا الفرق بصورة أساسية عند تطبيقنا للفرض الخامس الذي يتعامل مع الخواص غير الحادة.

٣-٢-٤ الافتراض الرابع: الجمع الخطي للدوال
Linear Combination of Functions

إذا كان $\hat{\alpha}$ هو مؤثر خطي هيرميشيان (Hermitian) يمثل خاصية ما. فإن الدوال الذاتية ϕ_i لهذا المؤثر تكون مجموعة كاملة.

هذا الافتراض في حقيقته افتراضًا رياضيًا أساسًا أكثر منه فيزيائيًا، و تنبع أهميته من كون أنه يمكننا من التعبير عن دالة الحالة للنظام كتطابق (superposition) للمجموعة الكاملة من الدوال الذاتية لأي مؤثر كمي. وبمعنى أقل تحفظًا، فإننا يمكن أن نقول أنه إذا كانت ϕ_i هي دوال ذاتية للمؤثر $\hat{\alpha}$ فإننا يمكن أن نشتق الدالة Ψ والتي تكون عبارة عن جمع خطي (linear combination) لهذه الدوال

$$\Psi = \sum_i C_i \phi_i \qquad (٣-١٦)$$

حيث C_i هي معاملات الدوال (ϕ_i). تعبر هذه المعاملات عن وزن هذه الدوال في الجمع الخطي للدالة الكلية Ψ. أي إننا استخدمنا المجموعة الكاملة للدوال الذاتية للمؤثر الكمي لبناء دالة جديدة.

فمثلا المعادلة $[g = qx]$ هي معادلة خط مستقيم. وتبعًا للافتراض الرابع، فإن هذا الخط المستقيم يمكن استنباطه بتطابق (superposition) مجموعة متناهية من دوال الجيب (sine functions)، والتي هي دوال ذاتية للمؤثر $\frac{d^2}{dx^2}$ أو بتطابق مجموعة متناهية من الدوال الأسية (e^{ikx}) وهي دوال ذاتية للمؤثر d/dx. وهذا الافتراض رغم أن له بعدًا رياضيًا واضحًا، إلا إننا سوف نستفيد بشدة عند

استخدامه، وسوف يكون له تأثير واضح على مدى تفهمنا لبعض الفلسفات الخاصة بنظرية الكم.

وإحدى الحالات الخاصة لهذا الافتراض هي أن يكون لدينا مجموعة كاملة من الدوال الذاتية (ϕ_i) المختلفة كلها تعطي نفس القيمة الذاتية (a) عند معاملتها بالمؤثر الكمي($\hat{\alpha}$). أي إنها تحقق المعادلة

$$\hat{\alpha}\ \phi_i = a\ \phi_i \qquad i = 1,2,3, \ldots.. k \qquad (١٧-٣)$$

هذه المجموعة من الدوال المختلفة والتي تعطي القيمة الذاتية (a) تسمى مجموعة منقسمة (degenerate set) بدرجة انقسامية تساوي عددها (k). والآن تستطيع المجموعة المنقسمة أن تكون دالة جديدة بالجمع الخطي:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{k} C_i \phi_i \qquad (١٨-٣)$$

والفرق بين التعبير (٣-١٨)، (٣-١٦) رغم التشابه الواضح بينهما هو أن الدالة Ψ في التعبير (٣-١٨) هي أيضًا دالة ذاتية للمؤثر الكمي ($\hat{\alpha}$) ولها نفس القيمة (a). أي أن (٣-١٨) هي حالة خاصة من (٣-١٦) تظهر فقط إذا كانت مجموعة الدوال ϕ_i هي مجموعة دوال منقسمة. ويمكن إثبات ذلك كالآتي:

$$\hat{\alpha}\ \Psi = \hat{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{k} C_i \phi_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} C_i \hat{\alpha} \phi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} C_i\ a\ \phi_i$$

$$= a \sum_{i=1}^{k} C_i\ \phi_i = a\Psi$$

٣-٢-٥ الفرض الخامس: القيم المتوقعة للخواص Expectation Values

إذا لم تكن دالة الحالة Ψ دالة ذاتية للمؤثر الكمي المقابل لخاصية ما، فإنه من الممكن تعيين القيمة المتوسطة لهذه الخاصية باستخدام التعبير

$$< a > = \frac{\int \Psi^* \hat{\alpha} \Psi d\tau}{\int \Psi^* \Psi d\tau} \qquad (٣-١٩)$$

وهذا التعبير يطلق عليه نظرية القيمة المتوسطة (mean value theorem) ويمكن تبسيطه في حالة كون الدالة مطبعة (أي تحقق $\int \Psi^* \Psi dx = 1$) ليصبح في الصورة الأبسط:

$$< a > = \int \Psi^* \hat{\alpha} \Psi d\tau \qquad (٣-٢٠)$$

وتستخدم الأقواس < > للتعبير عن القيمة المتوسطة، ويطلق عليها أيضًا القيمة المتوقعة(expectation value). وحيث إن التعبير (٣-١٩) هو افتراض من افتراضات نظرية الكم، فإننا لا نستطيع أن نقدم إثباتًا رياضيًا له. ولكننا نحاول أن نتفهمه بصورة أعمق وأوضح، فلنفترض أولاً أن Ψ كانت دالة ذاتية للمؤثر $\hat{\alpha}$، وبالتالي فإن

$$< a > = \int \Psi^* \; \hat{\alpha} \; \Psi \; d\tau$$

$$< a > = \int \Psi^* a \Psi d\tau = a \int \Psi^* \Psi d\tau$$

$$< a > = a$$

أي إن القيمة المتوسطة للخاصية < a > تساوى القيمة العددية المطلقة لها في حالة ما إذا كانت الدالة Ψ دالة ذاتية للمؤثر الكمي. أي إن الافتراضين الثالث والخامس يتطابقان في حالة كون Ψ دالة ذاتية للمؤثر $\hat{\alpha}$. ولا بد أن يكون واضحًا تمامًا أن معنى القيمة المتوسطة أو المتوقعة للخاصية من المنظور الكمي يختلف تمامًا عن

معنى هذا التعبير في الميكانيكا الكلاسيكية. في هذه الأخيرة فإن هذا التعبير يعني المتوسط الزمني (time average)، أما نظرية الكم فإنها يمكن أن تقدم تعريفًا أوليًا لهذا التعبير على أساس أنه المتوسط الحسابي لعدد كبير جدًا من القياسات للخاصية المطلوبة.

ولتوضيح هذا التعريف، فإن دالة الموجة Ψ ما هي إلا جمع خطي للمجموعة الكاملة من الدوال الذاتية ϕ_i. أي إن: $\Psi = \sum c_i \phi_i$

وبالتعويض في التعبير (٣-٢٠) فإن

$$< a >= \int (\sum C_i \varphi_i)^* \ \hat{\alpha} \ (\sum C_i \varphi_i) d\tau$$
$$= \sum C_i^2 \int \varphi_i^* \ \hat{\alpha} \ \varphi_i d\tau$$

وحيث إن كل دالة φi تحقق المعادلة $\hat{\alpha}\phi_i = a_i \phi_i$ فإن:

$$< a >= \sum_i C_i^2 \int \varphi_i^* a_i \varphi_i d\tau$$

$$< a >= \sum_i C_i^2 a_i \int \varphi_i^* \varphi_i d\tau$$

وحيث إن الدوال الذاتية φ_i من المفترض أن تكون مطبعة فإن:

$$< a >= \sum_i C_i^2 a_i \qquad (٣-٢١)$$

أي أن القيمة المتوقعة < a > ما هي إلا المجموع الموزون (weighted) لكل القيم الذاتية a_i، وبتعبير أقل تحفظًا، فإننا يمكن أن نقول إنه في حالة إجراء عدد كبير جدًا من القياسات لخاصية ما، فإننا نحصل في كل مرة على قيمة عددية مختلفة. هذه القيم هي القيم الذاتية (a_i) للدوال (φ_i) المكونة للجمع الخطى للدالة الكلية (Ψ). وبذلك فإننا لا نستطيع أن نرصد قيمة معينة لهذه الخاصية وإنما نستطيع أن

نأخذ المتوسط الحسابي الموزون للتعبير (٣-٢١) عن القيم المتوقعة للخاصية.

٣-٢-٦ **الفرض السادس: تغير الدوال بالزمن**
Time- Dependent Wave Functions

إن تغير حالة النظام بالزمن يمكن التعبير عنه بمعادلة الزمن لشرودنجر Time-Dependent

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q,t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(q,t) \qquad (٣-٢٢)$$

حيث $\hat{H}$ هو مؤثر الهاميلتوني للنظام والدالة $\Psi(q,t)$ هي دالة الحالة عند أي زمن t.

ويوضح هذا الافتراض كيفية تغير الدالة Ψ مع الزمن. وكما هو الحال في الميكانيكا الكلاسيكية، فإن الحالة اللحظية للنظام تحدد الحالة المستقبلية له. إن الأبحاث الحديثة في مجال كيمياء الكم والتحليل الطيفي (spectroscopy) تعطي اهتمامًا كبيرًا لدراسة الظواهر المعتمدة على الزمن (time-dependent phenomena)، وأصبحت المعادلة (٣-٢٢) تلقى تطبيقًا واسعًا في مجالات عدة. ويهمنا أن نوضح هنا أن عملية تغير الدالة Ψ مع الزمن وعملية استخلاص القيم العددية منها عمليتان مختلفتان تمامًا. فلنفترض أن هناك عددًا كبيرًا جدًا من الأنظمة المنقسمة وتشغل كلها نفس الحالة الابتدائية عند الزمن t_0، فإن $\Psi(t_0)$ هي دالة، أي من هذا النظم في هذه اللحظة. فإذا تركنا كل نظام بدون أي تدخل، فإن كل دالة حالة $\Psi(t)$ ستتطور مع الزمن طبقًا للمعادلة (٣-٢٢)، وحيث إن كل نظام من هذه الأنظمة له نفس المؤثر الهاملتوني $\hat{H}$ فإن كل النظم ستنتهي إلى الدالة $\Psi(t_1)$ عند الزمن t_1 المتقدم. ولكن افترض أنه عند زمن آخر t_2 بدأنا عملية متزامنة لقياس خاصية ما في كل نظام من هذه الأنظمة، فإننا لن نحصل على قيمة واحدة في كل هذه القياسات، رغم أن دالة الحالة واحدة لكل هذه الأنظمة. وإنما سنحصل على توزيع للقيم يمكن بواسطته حساب القيمة المتوقعة (expectation value) للخاصية تبعًا للمعادلة (٣-٢١).

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(q,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar\partial^2}{2m\partial q^2}\Psi_{(q,t)} + U_2\Psi_{(q,t)} \qquad (٣-٢٣)$$

ولتفسير هذه الظاهرة، فإننا نقول أن دالة الحالة للنظام تتغير- تبعًا لميكانيكا الكم- بطريقتين مختلفتين:

أولا: التغير التدريجي المستمر بالزمن، وهو الممثل في المعادلة (٣-٢٢)، وهذا النوع من التغير يحدث تلقائيًا بدون أي تدخل خارجي.

ثانيا: التغير الفجائي غير المستمر وله احتماليات مختلفة. هذا التغير يواكب عملية القياس نفسها. فعند إجراء عملية لقياس خاصية ما فإنها تسبب اضطرابًا في النظام لا يمكن التنبؤ بمداه. ودرجة هذا الاضطراب ليست ثابتة في كل مرة يتم فيها القياس، ويسمى التغير الفجائي في الدالة ψ الناتج من عملية القياس اختزال دالة الموجة (reduction of the wave function)، إن تداعيات ظاهرة اختزال دالة الموجة عديدة، وسوف نتعرض لها خلال دراستنا المتقدمة في فصول هذا الكتاب.

أما إذا كان المؤثر الهاملتوني للنظام لا يعتمد على الزمن، وبالتالي فإننا أمام حالات لها طاقة محددة (definite) وفي كل حالة من هذه الحالات يجب أن تتحقق المعادلة $\hat{H}\Psi = E\Psi$ وبذلك تصبح المعادلة (٣-٢٢) بالصورة

$$E\Psi(q,t) = -\frac{\hbar\partial^2\Psi_{(q,t)} + U_2\Psi_{(q,t)}}{2m\partial q^2} \qquad (٣-٢٤)$$

ويمكن بصفة عامة إيجاد حل عام لهذه المعادلة الأخيرة باختيار دالة $\Psi_{(q,\,t)}$ بالشكل العام

$$\Psi(q,t) = Be^{-iEt/\hbar} \qquad (٣-٢٥)$$

حيث الدالة الكلية $\Psi_{(q,\,t)}$ هي دالة في إحداثيات النظام وأيضًا في الزمن. وعند اختيارنا للحل العام (٣-٢٤) فإن الجزء B هو دالة في الإحداثيات فقط ولا يعتمد على الزمن أساسًا. ويمكن التعبير عنه بالرمز $B = \Psi_q$ أما

الحد الأسى $\exp(-iEt/\hbar)$ فهو يمثل تغير طور (phase) دالة الموجة بالزمن. ويمكن للطالب بسهولة إثبات أن الدالة (٣-٢٤) هي حل عام للمعادلة (٣-٢٣).

٣-٣ ملاحظات متممة : Complementary Remarks

قدمنا فيما سبق الإطار العام لنظرية الكم في صورة مجموعة من الافتراضات التي تحاول أن تضفي معنىً فيزيائيًا للكميات الرياضية العددية التي تعرضنا لها. وكما سبق وقدمنا، فإننا نتقبل هذه الافتراضات كقواعد نظرية بدون أي إثبات. ويمكن تعيين مدى صحتها عند تطبيقها عمليًا، ويعتبر إثباتًا كافيًا لصحة هذه الافتراضات. وحتى تكتمل رؤيتنا فإننا نقدم في هذا الفصل بعض الملاحظات المتممة لمفاهيم دالة الحالة والمؤثر الكمي وتطابق الموجات، حيث إن هذه النقاط الإضافية تزيد الصورة وضوحًا وفهمًا.

٣-٣-١ التطابق وقاعدة عدم التأكد لهيزنبرج
Superposition and Heisenberg Uncertainty Principle

يمكننا الافتراض الرابع من افتراضات نظرية الكم من تمثيل دالة الحالة Ψ لأي نظام على أنها جمع خطى (linear combination) لمجموعة الدوال الذاتية (ϕ_i) و يهمنا هنا أن نتذكر أن جميع هذه الدوال هي دوال موجية ويمكننا أن نفرق بين حالتين مختلفتين:

١- جميع الدوال الموجية (ϕ_i) تكون مجموعة منقسمة (degenerate set) وهذه الحالة خاصة بالطبع. وفي هذه الحالة فإن طاقة جميع هذه الموجات تكون متساوية، وبالتالي فكلها لها نفس الطول الموجي (λ). وعند تطابق (superposition) هذه المجموعة من الموجات فإنها ستتداخل تداخلاً بناءً (constructive interference) في جميع الأنحاء، وتكون نتيجة هذا التداخل هو التقوية (reinforcement). والموجة المحصلة $\Psi_{\text{Resultant}}$ تكون متجانسة فتنتشر في كل الفراغ المتاح

لها. وحيث إن هذه الموجة لها طول موجي λ محدد وثابت، فإننا يمكن أن نعين كمية تحرك انتشارها P باستخدام علاقة دى برولى (١-٣٦) بدقة. ويوضح الشكل رقم (٣-١ أ) هذا التداخل البناء.

شكل (٣-١-أ): بناء الدالة Ψ من مجموعه منقسمة من الدوال (ϕ_i) يؤدي إلى تداخل بناء.

٢- حالة عامة تكون فيها المجموعة (ϕ_i) مجموعة غير منقسمة، وبالتالي فإن كل دالة موجة لها طاقة مختلفة عن الدوال الأخرى، أي إن الأطوال الموجية لهذه الدوال ستغطي حيزًا واسعًا من الأطوال الموجية، وعند تطابق هذه المجموعة من الموجات، فإنه سيحدث تداخل هدام (destructive interference) في أغلب النقاط في الفراغ، ويحدث التداخل البناء فقط عند النقاط التي تكون فيها الموجات في نفس الطور (in-phase). وعلى ذلك فإن نتيجة التطابق هو تلاشى الموجة المحصلة Ψ في أغلب الفراغ وتركيزها عند نقاط معينة بعينها، ويوضح الشكل (٣-١-ب) عملية التركيز المكاني (localization) للموجة المحصلة Ψ. وفي هذه الحالة، وحيث إن الموجة لها سعة اهتزاز متناهية في الصغر في جميع الأماكن في الفراغ ماعدا نقطة معينة بين x , $x + dx$ مثلاً، كما هو مبين في الشكل (٣-١-ب) فإننا نستطيع أن نزعم أن النظام المصاحب لهذه الموجة متمركز في المنطقة dx، أي إننا استطعنا تعيين مكان الجسيم بدقة في هذه الحالة. وحيث إنه لا يمكن افتراض قيمة معينة وثابتة للطول الموجي في هذه الحالة، فإنه لا يمكن تعيين كمية تحرك P بصورة دقيقة. أما في الحالة الأولى، فإننا تمكنا من تعيين قيمة P بدقة، ولكن حيث إن الموجة منتشرة في الفراغ بسعة اهتزاز ثابتة في كل النقاط، فإننا لا يمكننا أن نفترض وجود النظام في نقطة أو منطقة بعينها، إنما نفقد الدقة في تحديد المكان.

شكل (٣-١-ب): بناء الدالة Ψ من مجموعه غير منقسمة من الدوال (ϕ_i) يؤدي إلى تداخل هدم والتركيز المكاني للموجه.

ومما سبق يتضح أن التعيين المتزامن (simultaneous) لخاصيتي المكان وكمية التحرك معرض دائما لدرجة من عدم التأكد، فإذا استطعنا تعيين المكان بدقة فإن ذلك يكون على حساب كمية التحرك التي تزداد فيه درجة عدم التأكد، والعكس في حالة ما إذا استطعنا تعيين كمية التحرك بدقة فإن ذلك يؤدي إلى ازدياد عدم التأكد في مكان النظام، وهذه النتيجة التي قدمناها هي إحدى صور قاعدة عدم التأكد لهيزنبرج (Heisenberg uncertainty principle) والتي تفترض أن هناك مجموعة من أزواج الخواص لا يمكن إجراء تعيين متزامن لها. هذه الأزواج تسمى الأزواج المتممة لبعضها البعض (complementary). فالمكان وكمية التحرك هما إحدى تلك الأزواج. ويمكن التعبير رياضيًا عن قاعدة عدم التأكد بالصورة الآتية:

$$\Delta P.\Delta x = \frac{h}{4\pi} \qquad (٣-٢٦)$$

حيث Δx , ΔP هما مقدار عدم التأكد في كمية التحرك وفي مكان النظام (الإحداثي x في هذه الحالة). وسوف نتعرض أثناء دراستنا للعديد من صور تطبيق هذه القاعدة.

مثال (٣-٤)

احسب مقدار عدم التأكد من موقع كرة وزنها ٥ أوقيات رشقت بسرعة ٩٥ ميلاً في الساعة إذا ما كان بمقدورنا قياس سرعتها بدقة واحد على المليون من ١٪.

الحل

نستخدم قاعدة هيزنبرج لحساب عدم التأكد في الموقع:

$$\Delta p.\Delta x = h \qquad (١)$$

حيث Δp هو مقدار عدم التأكد في كمية التحرك، و Δx هي مقدار عدم التأكد في الموقع لحساب مقدار عدم التأكد في كمية التحرك التي تعطى بالعلاقة:

$$P = mv \qquad (٢)$$

حيث m هي كتلة (وزن) الكرة، ΔV هو مقدار عدم التأكد في سرعتها على أن يكون هذين المقدارين بالوحدات العالمية (SI):

نحول الوزن بالأوقيات إلى وزن بالكيلو جرامات:

$$m = \frac{5}{16} x \frac{454}{1000} = 14g = \frac{14}{1000} = 0.14kg$$

ثم نحول السرعة بالأميال في الساعة إلى الأمتار في الثانية

$$v = \frac{90x1610}{3600} = 40\ m/s$$

نعوض في المعادلة (2) لنحصل على كمية التحرك (P)

$$P = 0.14kg \times 40m/s = 5.6\ kg\ m/s$$

عدم التأكد (ΔP) هو واحد على المليون من ١٪ من P

$$\therefore \Delta P = Px10^{-8} = 5.6x10^{-8} kg/ms$$

$\therefore$ نعوض في المعادلة (1) لنحصل على عدم التأكد في الموقع

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta P} = \frac{6.626x10^{-34}}{5.6x10^{-8}} = 1.2x10^{-26}\ m$$

وهذه مسافة غير ذات أهمية على الإطلاق.

مثال ٣-٥

ما هو عدم التأكد في كمية التحرك إذا ما تمكنا من تحديد موقعه في ذرة في حدود 50pm.

الحل

نعوض في العلاقة: $\Delta P = \frac{h}{\Delta x} = \frac{6.626x10^{-34}}{50x10^{-12}} = 1.3x10^{-23}\ kg\ m/s$

بما أن $P = mv$ وأن كتلة الإلكترون ثابتة وتساوي 9.11×10^{-31}kg فإن عدم التأكد في كمية التحرك ناتج من عدم التأكد في السرعة ΔV:

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\Delta P}{m} = \frac{1.3x10^{-23}\ kg\ m/s}{9.11x10^{-3}\ kg} = 1.4x10^{7}\ m/s$$

وهذا عدم تأكد كبير جدًا في السرعة، مما يعني عدم التأكد الكبير أيضًا في كمية التحرك.

٢-٣-٣ أهمية خاصية هيرميشيان للمؤثرات الكمة
Importance of the Hermitian Property of Operators

اشـترط الافـتراض الثاني أن يكون المؤثـر الكمي مؤثـرًا خطيًا متماثلاً (هيرميشيان) (Hermitian) والسبب في هذا هو أن المؤثرات الهيرميشية هي التي تتمتع دائمًا وأبدًا بقيم ذاتية حقيقية (real) أي لا يمكن أن يكون لهذه المؤثرات الهيرميشية أي قيم ذاتية معقدة أو تخيلية. ثم إن اختيارنا للمؤثرات الكمة الهيرميشية يضمن أن تكون المجموعة الكاملة من دوال الحال $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \ldots$ محققة لشرط التعامد (٣-٥) فيما بينهما، وفيما يلي إثبات لهاتين القاعدتين:

أولاً: المؤثرات الهيرميشية لها قيم ذاتية حقيقية فقط:

بما أن الافتراض الرابع يقول بأن أي قياس لمشاهد مرتبط بالمؤثـر $(\hat{A})$ يعطي قيمًا تكون عبارة عن القيم الذاتية (a) لهذا المؤثر؛ وبما أن الدوال الذاتية والمؤثرات نفسها هي مقادير معقدة، فيجب أن تكون القيم الذاتية هي مقادير حقيقية إذا ما قدر لها بأن تتطابق مع القياسات المعملية. المؤثرات التي تحقق هذا الشرط هي مؤثرات هيرميشيان. ولإثبات ذلك:

لنفترض دالة موجة Ψ ومرافقها المعقد هو Ψ^* والمؤثر الهيرميشيان هو $\hat{\alpha}$ مثلاً. إذا ما أعملنا $\hat{\alpha}$ في هاتين الدالتين:

$$\hat{\alpha}\ \Psi = a\,\Psi$$

$$\hat{\alpha}\ \Psi^* = a^*\,\Psi^*$$

حيث a هي قيمة حقيقية أما a^*، Ψ^*، $\hat{\alpha}$ فهي مقادير معقدة.

بضرب المعادلة الأولى في Ψ^* والثانية في Ψ (من اليسار)

$$\Psi^*\ \hat{\alpha}\,\Psi = \Psi^*\,a\,\Psi = a\,\Psi^*\,\Psi$$

$$\Psi\ \ \hat{\alpha}\,\Psi^* = \Psi\,a^*\,\Psi^* = a^*\,\Psi^*\,\Psi$$

بتكامل طرفي كل من هاتين المعادلتين

$$\int \Psi^* \ \hat{\alpha} \ \Psi \ d\tau = a \int \Psi^* \ \Psi \ d\tau$$

$$\int \Psi \ \hat{\alpha} \ \Psi^* \ d\tau = a^* \int \Psi^* \ \Psi \ d\tau$$

وحيث إن الدالة Ψ دالة مطبعة للواحد الصحيح، وبطرح المعادلتين ينتج أن

$$\int \Psi^* \ \ \hat{\alpha} \ \Psi \ d\tau - \int \Psi \ \ \hat{\alpha} \ \Psi^* \ \ d\tau = (a - a \ \ ) = 0$$

وحيث إن $\hat{\alpha}$ هو مؤثر كمي هيرميشيان، فإن الطرف الأيسر من المعادلة يساوي الصفر. وبالتالي فإن $a = a^*$

وهذا تأكيد على أن a هو رقم حقيقي، لأن الأرقام الحقيقية فقط هي التي تساوي مرافقها المعقد. (انظر المثال ٣-٣).

ثانيًا: استخدام المؤثر الكمي الهيرميشيان يضمن تحقيق شرط التعامد بين الدوال في المجموعة الواحدة.

لنفرض أن Ψ_i و Ψ_j هي دوال موجية تمثل حالتين j , i لنفس النظام. المطلوب إثبات أن

$$\int \Psi_i \ \Psi_j \ d\tau = 0$$

ويمكن أن نتبع نفس المنطق الرياضي المستخدم في الفقرة السابقة ببناء المعادلتين الأساسيتين

$$\hat{\alpha} \ \Psi_i = a_i \ \Psi_i$$

$$\hat{\alpha} \ \Psi_j = a_j \ \Psi_j$$

لنصل إلى المعادلة العامة

$$\int \Psi_i \ \hat{\alpha} \ \Psi_j \ d\tau - \int \Psi_j \ \hat{\alpha} \ \Psi_i \ d\tau = (a_i - a_j) \int \Psi_i \Psi_j \ d\tau$$

وحيث إن $\hat{\alpha}$ هيرميشيان فإن الطرف الأيسر يساوي الصفر

$$(a_i - a_j) \int \Psi_i \Psi_j \, d\tau = 0$$

فإما $(a_i - a_j)$ يساوى الصفر، وهذا لا يمكن إلا في حالة الدوال المنقسمة، وبالتالي فإن $i \neq j$ $\quad \int \Psi_i \Psi_j \, d\tau = 0$

وهو شرط التعامد.

مثال ٣-٦

تعطى الدوال الموجية لجسيم يدور في حلقة دائرية بنصف قطر (a) بالعلاقة: $m = 0, \pm 1, \pm 2$ $\quad \Psi_m(\theta) = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}} e^{im\theta}$

حيث تصف (θ) الموقع الدائري للجسيم حول الحلقة $([0 \le \theta \le 2\pi])$.
اثبت أن هذه الدوال تكون مجموعة مطبعة التعامد (orthonormal).

الحل

لإثبات أن مجموعة الدوال تكون زمرة مطبعة التعامد، يجب أن توضح أنها تحقق المعادلة: $\int_{-\alpha}^{\alpha} \Psi^*_j \; \Psi_i d\tau = \delta_{ij}$

ونبدأ ذلك بأن نعوض معادلات الجسيم في المعادلة أعلاه:

$$\int_0^{2\pi} \Psi^*_m(\theta) \;\; \Psi_n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} \;\; e^{in\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n-m)\theta d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(n-m)\theta d\theta$$

إذا ما جعلنا $n \neq m$؛ فإن التكاملين الأخيرين يتلاشيان بسبب أنهما أكثر من دائرتين مكتملتين لجيب التمام والجيب، ولذا فإن الطرف الأيمن يساوي صفرًا؛ أي أن $\int_0^{2\pi} \Psi^*_m \theta \;\; \Psi_n(0) \, d\theta = 0$

وهو ما يحقق شرط التعامد.

أما إذا كان $m = n$، فإن التكامل الأخير يتلاشى نظرًا لأن $[\sin 0 = 0]$ ولكن الأول يعطى (2π) نظرًا لأن $[\cos\theta = 1]$ ولذا فإن الطرف الأيمن يساوي واحد، أي أن

$$\int_0^{2\pi} \Psi^*_n \ \Psi_n \, d\theta = \int_0^{2\pi} \Psi^*_m \ \Psi_m \, d\theta = 1$$

وهو ما يحقق شرط التعامد.

إذا دمجنا الشرطين مع بعضهما (التطبيع المتعامد) فإن شكل المعادلة هو:

$$\int_0^{2\pi} \Psi^*_m(\theta)\, \Psi_n(\theta)\, d\theta = \delta_{mn} \qquad \begin{aligned} \delta_{mn} &= 0 \quad m \neq n \\ &= 1 \quad m = n \end{aligned}$$

ولذا فإن الدوال $\Psi_m(\theta)$ تكون زمرة مطبعة ومتعامدة.

٣-٣-٣ تـدوين ديراك ذو الأقواس Dirac Bracket Notation

إن استخدام التكاملات المتكررة وعمليات التفاضل في أكثر من فراغ جعلت التعبيرات الرياضية الكمة معقدة في شكلها. ويمكن تبسيط هذه التعابير باستخدام نظام الأقواس لديراك. وفي هذا النظام تمثل دالة الحالة Ψ_i بالقوس $| i >$ ويطلق عليه كيت، في حين أن مرافقها المعقد يمثل بالقوس المعاكس $< i |$ ويسمى برا. وعلى ذلك فإن شرط التطبيع يمكن كتابته بالصورة $< i \,|\, i > = 1$ في حين أن شرط التعامد يمكن كتابته بالصورة $< i \,|\, j > = 0$ وفي حالة وجود مؤثر كمي في التكامل فإنه يوضع بين خطين متوازيين. فمثلاً علاقة هيرميشيان للمؤثرات الكمة يمكن كتابتها على الصورة: $< m \,|\, \hat{\alpha} \,|\, n > = < n \,|\, \hat{\alpha} \,|\, m >$ وقانون القيمة المتوقعة أو المتوسطة لدالة الحالة Ψ_m المستخلص من الافتراض الخامس مثلاً يمكن كتابته بالصورة $< a > = < m \,|\, \hat{\alpha} \,|\, m >$.

أو بصورة أكثر وضوحًا

$$< a > = < \Psi^*_m \mid \hat{\alpha} \mid \Psi_m >$$

وفي بقية أجزاء هذا الكتاب سوف نستخدم نظام الأقواس هذا لتبسيط الشكل الرياضي للتعابير الكمة.

٣-٣-٤ توصيف حالات النظام Specification of States

أحد الوسائل الممكنة لتعريف الحالات المتاحة لنظام ما هي باستخدام قيم الخواص في هذه الحالة. فمثلما كان الحال في الميكانيكا الكلاسيكية فإن الحالة تعرف تعريفًا كاملاً باستخدام القيم العددية للمتغيرات فيها من المكان وكمية التحرك (x , Px) في الاتجاه x مثلاً. وبالمثل فإن إحدى حالات الكم يمكن التعبير عنها $\mid a, b.....>$ حيث ...,a, b هي قيم ذاتية للمؤثرات الكمة المقابلة للخواص ... ,A, B على التوالي. أي إنه إذا كان النظام في الحالة $\mid a ,b,.....>$ فإنه عند قياسنا للخاصية A سنجد قيمتها المطلقة هي a وعند قياسنا للخاصية B سنجد قيمتها المطلقة هي b.... وهكذا.

$$\hat{A}\Psi = a\Psi$$

$$\hat{B}\Psi = b\Psi$$

السؤال الآن هو هل من الممكن أن تكون Ψ (دالة الحالة للنظام) هي دالة ذاتية للمؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ في نفس الوقت ؟ أم أن هناك بعض القيود على ذلك؟

وهنا يأتي قانون جديد يضع شرطًا لقدرة الدالة على أن تكون دالة ذاتية للعديد من المؤثرات الكمة، وينص على:

من الممكن أن تكون دالة الموجه لنظام ما دالة ذاتية لعدة مؤثرات كمة بشرط أن تتبادل (commute) هذه المؤثرات مع بعضها البعض.

أي إننا لكي نعين a, b كقيم مطلقة للخاصيتين A , B، فإنه يجب أن تتحقق العلاقة

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \qquad (٣-٢٧)$$

حيث إن $\hat{A}$ و $\hat{B}$ هما المؤثران الكميان المقابلان للخاصيتين B, A أي إن الشرط (٣-٢٦) يعرضنا إلى درجة من درجات التأكد في القيم العددية المعينة للخاصيتين. وهذا هو مجال تطبيق قاعدة عدم التأكد لهيزنبرج.

مثال ٣-٧

أثبت أنه لا يمكن أن تكون الدالة Ψ داله ذاتية للمؤثرين الكميين $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ إلا إذا كان هذان المؤثران متبادلين مع بعضهما البعض.

الحل

افترض معادلة القيمة الذاتية التالية: $\hat{\alpha}\Psi = a\Psi$

$$\hat{\beta}\Psi = b\Psi$$

وبضرب المعادلة الأولى من اليسار في $\hat{\beta}$ والمعادلة الثانية في $\hat{\alpha}$ فان

$$\hat{\beta}\hat{\alpha}\Psi = \hat{\beta}a\Psi = a\hat{\beta}\Psi = ab\Psi$$

$$\hat{\alpha}\hat{\beta}\Psi = \hat{\alpha}b\Psi = b\hat{\alpha}\Psi = ba\Psi$$

وبإعادة ترتيب المعادلتين الأخيرتين وبطرحهما من بعضهما البعض:

$$(\hat{\beta}\hat{\alpha} - \hat{\alpha}\hat{\beta})\Psi = (ab - ba)\Psi = \text{صفر}$$

بما أن حاصل طرح هاتين القيمتين يساوي صفرًا؛ بما يعني أن ab = ba، ولذا يكون هذان المؤثران متبادلين.

مثال ٣-٨:

هل المؤثران $[x, p_x]$ يتبادلان؟

احسب المتبادل (commutator) $[x, p_x]$.

الحل

لنفترض الدالة $f(x)$ كدالة في المتغير x

$$\left[\hat{x}\hat{p}_x\right] f(x) = x.\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right) f(x)$$

$$= -i\hbar.\ x f`(x)$$

حيث $f`(x)$ هي المشتق الأول للدالة $f(x)$.

$$\left[\hat{p}_x\hat{x}\right] f(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\ x f(x)$$

$$= -i\hbar[xf`(x) + f(x)]$$

$$[\hat{x},\hat{p}_x]\ f(x) = (\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})f(x)$$

$$=(-i\hbar\ xf'(x)) + (i\hbar xf'(x) + i\hbar f(x)$$

$$= i\hbar\ f(x)$$

$$\therefore\ [\hat{x},\hat{p}_x] = i\hbar$$

ومن هذا المثال يتضح أن المؤثرين الكميين لكمية التحرك وللمكان لا يتبادلان، مما يعني أنه لا يمكن تعيين القيم العددية المطلقة لهاتين الخاصتين في نفس الوقت و بدقة متناهية.

تمارين

١- إن احتمالية أن يكون المتغير x له قيمة تقع بين x , $-x$ تعطى بالتعبير $\rho_{(x)} = N \exp(-ax^2)$ حيث a ثابت موجب. اثبت أن $N = (a/\pi)^{1/2}$ عندما تكون $\rho_{(x)}$ مطبعة للواحد الصحيح. ارسم شكل $\rho_{(x)}$ كدالة في المتغير x. أين تقع نقاط الانعكاس.

٢- طبّع الدالة: $\varphi = u_1 + ku_2$ (k ثابت) لكل حالة من الحالات الآتية:

أ) u_2, u_1 متعامدتان (orthogonal).

ب) $\int u_1\, u_2\, d\tau = s_{12} \neq 0$ حيث s_{12} يسمى تكامل التداخل بين الدالتين u_2, u_1. افترض في كلا الحالتين أن u_2, u_1 دالتان مطبّعتان للواحد الصحيح.

٣- إذا كانت Ψ_j , Ψ_k هما دالتين ذاتيتين غير منقسمتين للمؤثر الهرميشي $\hat{A}$ ، اثبت أن التكامل $< \Psi_k |\hat{A}| \Psi_j >= 0$، ماذا يمكن أن نستنتج من قيمة هذا التكامل إذا ما كانت Ψ_j , Ψ_k منقسمتين ؟.

ملحوظة: دالتان منقسمتان تعني أن لهما نفس القيم الذاتية للمؤثر $\hat{A}$.

٤- إذا كان المؤثر الهاملتوني لنظام ما له الصورة:
$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V$ حيث V مقدار ثابت. والدوال الذاتية لهذا المؤثر(غير مطبّعة) هي ; $\Psi_n = e^{\pm inx}$ حيث .... $n = 1 , 2 , 3$

أ) ما هي القيمة المتوقعة للمؤثر $\hat{H}$ عندما يكون النظام في الحالة $n = 3$

ب) ما هي القيمة المتوقعة لمركبة كمية التحرك الخطي في الاتجاه (P_x) في الحالة $n = 3$.

٥- أوجد التعبير المناسب لطاقة الوضع في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) جسيم حر $f = 0$

ب) مهتز توافقي $f = -kx$ (k مقدار ثابت)

ج) قانون كولوم $f = q_1q_2/r^2$

في كل هذه الحالات f تعبر عن القوه. r , x تعبران عن الإزاحة (المسافة).

٦- إذا كانت طاقة الوضع بين كتلتين m_1 , m_2 يمكن التعبير عنها بالصورة
$V = aR^{12} - bR^{6}$

حيث إن a , b هما مقداران ثابتان و R هي المسافة بين الكتلتين. اكتب التعبير الكامل لمؤثر الطاقة الكلية لهذا النظام.

٧- اثبت أن مؤثر المكان $\hat{x}$ هو مؤثر هيرميشيان.

٨- أ) أي من الدوال الآتية مطبّعة للواحد الصحيح:
$\sin ax\ (0, \infty)$; $e^{x}\ (0, \infty)$; $\exp(-x^2)\ (-\infty, \infty)$ ؟

ب) أي من الدوال الآتية تعتبر دالة مقبولة كدالة حالة:

$$\tan(1-x)(0,\infty) \quad , \quad \frac{1}{x}(0,\alpha)$$

٩- افترض الجمع البسيط الآتي:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{3} a_n ;$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} b_n$$

عند محاولة كتابة حاصل الضرب S_1S_2 فإننا يمكن أن نكتب

$$S_1S_2 = \sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{2} a_n b_m$$

$$S_1S_2 = \sum_{n=1}^{3}\sum_{n=1}^{2} a_n b_n$$

وضح أي التعبيرين لحاصل الضرب هو الصحيح.

١٠- اثبت أنه إذا كان $\hat{A}$ هو مؤثر هيرميشي فإن

$$\int \hat{A}^{*}\Psi^{*}\hat{B}\Psi dx = \int \Psi^{*}\hat{A}\hat{B}\Psi dx$$

١١- إذا كانت Ψ هي دالة موجة غير مطبّعة و N هو ثابت التطبيع. حيث ($N\Psi$) تكون مطبّعة للواحد الصحيح. عبر عن $|N|$ بمعرفة Ψ.

١٢- استنبط المؤثر الكمي للمركبات الثلاثة لكمية التحرك L. علمًا بأنه في النظام الكلاسيكي $L = r \times P$ حيث P هو كمية التحرك عند النقطة r. و نقطة أصل الإحداثيات بالنسبة للمتجه r هي النقطة التي تحسب حولها كمية التحرك L.