النمذجة الرياضية لحركة الموائع

بحث مقدم لمادة مشروع تخرج

إعداد الطالبات

تهاني الأسمري

نجاح الصحفي

نها الصحفي

إشراف/ د. سلمى الطويرقي.

جامعة الملك عبدالعزيز - قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

١٤٣٣هـ - ١٤٣٤هـ

اهداء

إلى القلب الكبير والدي العزيز،

الى بلسم الشفاء والدتي،

الى روحاً سكنت روحي اختي زهور،

الى اخوتي اصحاب القلوب الطاهرة علي ومحمد وعامر وحسن

الى احباب قلبي ..

تهاني الاسمري

اهداء

إلى الحضن الدافئ.. القلب الحنون

امي الحبيبة

إلى معلمي الاول ومرشدي في الحياة

أبي الغالي

إلى كل من دعمني وساعدني في مشواري.. إليكم احبتي

نجاح الصحفي

اهداء

إلى المربي الذي أنار لي الطريق وعلمني الإسلام عقيدة وسلوكاً..

والدي يرحمه الله تعالى..

ليكون هذا الجهد ثمرة من غراسه وثواباً في صحيفة أعماله وزيادة في حسناته..

راجية الله تعالى أن يتغمده برحمته ويظلَه تحت ظل عرشه،

وإلى والدتي الحبيبة ولأشخاص أحمل لهم مكانة في قلبي.

نها الصحفي

شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين وبعد....

لا يسعنا بعد إتمام هذا البحث إلا أن نشكر الله عز وجل الذي ساعدنا على إتمام هذا البحث الذي لم يتم لولا عونه وتوفيقه

كما نتقدم بخالص الشكر والتقدير لأستاذتنا الفاضلة الدكتورة سلمى الطويرقي، على ما قدمته لنا من نصح وتوجيهات سديدة وملاحظات علمية قيمة أسهمت في إنجاز البحث.

ملخص البحث

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الخلق والمرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين ...

وبعد

هيأ المولى الكريم لنا سبل الحياة الرغيدة على سطح الأرض، فأجرى الماء الذي هو مطلب الإنسان الأول، وأجرى الرياح لتسهل حركة السفن في البحار، وأيضاً ليسوق الله بها السحاب على أي بلد أراد.

إن الماء والهواء والكثير من المواد المحيطة بنا تعد من الموائع، كما أن الدم الذي يجري في أجسامنا أيضاً هو مائع. ولأن الموائع محيطة بنا في مختلف المجالات فإننا نستطيع الاستفادة منها فيما يخدم بني الإنسان ويُسهل لهم طرق العيش. ولما للموائع من أهمية في حياتنا اردنا في هذا البحث ان نتعرف على خصائص الموائع وكيفية تدفقها وصياغة حركتها رياضياً. ولتحقيق هذه الغاية اطلعنا على بعض المراجع العربية التي تناولت خصائص الموائع وحركتها مثل كتاب مكيانيك الموائع للمهندس محمد الشمري[١]، وكتاب ميكانيك الموائع للكاتب عبدالجبار الجميلي[٢]، وكتاب المرجع الكامل في ميكانيكا الموائع للمهندس شريف فتحي الشافعي [٣]. واطلعنا ايضا على بعض المراجع الاجنبية مثل كتاب (LECTURES IN ELEMENTARY FLUID DYNAMICS) للمؤلف J. M. McDonough [1]، وكتاب (FUNDAMENTAL MECHANICS OF FLUIDS) للمؤلف L. L. Faulkner [2]. عند مقارنة المراجع العربية مع المراجع الاجنبية وجدنا ان المراجع الاجنبية اكثر تفصيلاً وتوضيحاً للموضوع. فكان هدفنا في هذا البحث أن نحذو حذو علمائنا الأوائل في ترجمة وتعريب الكتب الجيدة للحضارات المختلفة. من بين المراجع الاجنبية التي اطلعنا عليها كان المرجع [1] والمرجع [2] اكثر شرحاً وتبسيطاً لخصائص وديناميكية الموائع. لذا افردنا الباب الاول من هذا البحث لتعريف المائع وخصائصه، وبعض انواع التدفقات، وتعاريف ونظريات اساسية، حيث تم اقتباس وترجمة المادة العلمية في هذا الباب من المرجع[1]. بينما تناولنا في الباب الثاني طرق وصفة حركة الموائع، والاطارات المرجعية لدراسة حركة المائع، كما تطرقنا الى مبادئ الحفظ الثلاثة، وأيضا الدوران ومعدل تأثير القوى المماسية وتناولنا معاملات اللزوجة والمعادلات التأسيسية، وتحدثنا عن معادلات نافير-ستوكس ومعادلة الطاقة، وتوصلنا الى المعادلات التي تحكم تدفق الموائع النيوتونية، وتطرقنا الى الشروط الحدية، وقد تم اقتباس المادة العلمية في هذا الباب من المرجع[2].

إن ما يميز هذا البحث عن غيره من المراجع العربية هو أسلوبه الواضح والمعتمد كليا على ترجمة المادة العلمية من افضل المراجع الاجنبية، وهكذا استطعنا اثراء المكتبة العربية بمرجع باللغة العربية حول هذا الموضوع. نرجو من العلي القدير أن ينفعنا بما علمنا ويكتب لنا أجر العمل الذي قمنا به، وأن ينفع بهذا البحث طلاب العلم والمعرفة في مختلف المجالات.

فهرس المحتويات

الباب الأول: تدفق المائع وخصائصه

الباب الثاني: معادلات تحكم حركة المائع

قائمة الأشكال

الباب الأول

تدفق المائع وخصائصه

١-٠ مقدمة

تتضح أهمية الموائع عندما نفكر في الدور الذى تلعبه في حياتنا اليومية، حيث توجد أعداد هائلة من المسائل التي يهتم بها العاملون في مجال ديناميكا الموائع في الوقت الحاضر، وفيما يلي بعض هذه المسائل على سبيل المثال:

١- مسائل تحديد الشكل الأمثل لأجسام الطائرات الفائقة السرعة والسفن بكافة أنواعها وأشكالها والصواريخ والقذائف والغواصات.

٢- مسائل تحديد الشكل الأمثل لمكونات المحركات النفاثة والتوربينات.

٣- التصميم الأمثل لخطوط نقل الماء والنفط وغيرها من المواد السائلة.

٤- خصائص الحركة المعتمدة على الزمن للغازات المصحوبة بتفاعلات كيماوية، كتلك التي تحدث عند الاحتراق في الهواء أو داخل المحركات والآلات.

٥- خصائص الحركة الموجية في الأنهار والبحار.

٦- خصائص حركة الموائع في الأوساط المسامية المخلخلة (Porous)، وكيفية الاستفادة منها عند تصميم السدود أو البحث عن النفط أو المياه الجوفية.

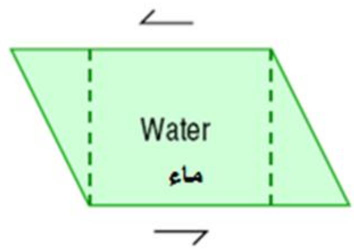
٧- خصائص حركة الهواء في الغلاف الجوي.

في هذا الباب سنستعرض بشكل موجز خصائص المائع وأنواع معينة لتدفق المائع. في الفصل الأول سنقدم تعريف المائع أما في الفصل الثاني فسنعطي تعاريف لبعض خصائص المائع مثل اللزوجة وانتشار العزم والتوصيل الحراري والضغط والكثافة. ثم تخصيص الفصل الثالث للتحدث عن أنواع معينة لتدفق المائع. بينما في الفصل الرابع سنقوم بتقديم بعض القوانين والنظريات والتعاريف اللازمة لصياغة نموذج رياضي لحركة المائع.

١-١ تعريف المائع

تعرف الموائع بأنها مواد قادرة على الانسياب وعلى التشكل بشكل الأوعية المحتوية لها ولا تظل الموائع ساكنة إذا أثرت عليها قوى مماسية، وتشمل الموائع السوائل والغازات.

يوضح الشكل (١-١) تأثير إجهاد مماسي على نوعين من المادة، الماء والفولاذ، ونلاحظ تأثر الماء بهذا الإجهاد المماسي حيث أنه يتحرك في نفس اتجاه القوة، بينما لا تتأثر قطعة الفولاذ بهذه القوة.



فقرة(أ) تأثر الماء في الحالة السائلة من حالات المادة بالإجهاد المماسي الذي تعرض له، وتحرك الماء في نفس اتجاه هذه القوة.

فقرة(ب) لا تتأثر قطعة الفولاذ بأي إجهاد مماسي تتعرض له.

شكل (١-١) تأثير قوى مماسية عل شكلان مختلفان من المادة، وتأثر الموائع بالقوى المماسية المؤثرة عليها.[١]

إن التشكل المستمر الناتج عن مقدار صغير من الإجهاد المماسي العشوائي غير ملحوظ في عدد من المواد الشائعة، والتي تبدو أنها تتدفق، مثلاً توجد بعض المواد في المطبخ مثل السكر والملح والبهارات التي نستطيع في الغالب سكبها، ولكن استجابة هذه المواد لقوة إجهاد مماسي مختلفة تماماً عن استجابة الموائع المتعرضة لنفس هذه القوة. ولنبرهن ذلك نسكب كوباً من السكر على طاولة بحذر لنحصل على كومة من السكر مخروطية الشكل تقريباً، كما هو ظاهر في الشكل (١-٢)، فعلى الرغم من جريان السكر إلا أن شكله المخروطي لم يتغير، والسبب في ذلك أن حبيبات السكر لديها مقاومة للإجهاد المماسي الناتج عن الجاذبية الأرضية، لذلك لا يُعد السكر من الموائع. على النقيض من ذلك نشاهد انتشار القهوة على سطح الطاولة، متأثرة بالإجهاد المماسي الناتج عن الجاذبية الأرضية، لذلك نعتبر القهوة مائعاً.

شكل (١-٢) تصرف المواد المختلفة، (أ) نلاحظ تكوم حبيبات السكر في شكل مخروطي، (ب) بينما تنسكب القهوة وتتدفق على الطاولة. [١]

١-٢ خصائص المائع

تصنف خصائص المائع إلى فئات متعددة، أبرز تلك الفئات هي: فئة خصائص النقل، مثل اللزوجة وانتشار العزم والتوصيل الحراري، أما الفئة الأخرى هي الخصائص الفيزيائية العامة، مثل الضغط والكثافة.

١-٢-١ اللزوجة (VISCOSITY)

لا يختلف مفهوم اللزوجة عن مفهوم الاحتكاك الداخلي، فعند جريان الموائع جزيئات المائع تنزلق على بعضها البعض، كما ينزلق المائع على سطح جامد.

تعريف اللزوجة

هي خاصية ناتجة عن مقاومة المائع لقوة مماسية مؤثرة عليه. نستطيع التعبير عن اللزوجة بدلالة القوة والمسافة والمساحة والسرعة، كالتالي:

$$\mu = \frac{Fh}{AU}$$

وحدة اللزوجة من التعريف تساوي:

$$\mu \sim \frac{F.L}{L^2.(L/T)} \sim \frac{F.T}{L^2}$$

بمعنى أن وحدة اللزوجة هي نيوتن في الثانية لكل متر تربيع، ونرمز لهذه الوحدة بالرمز $^{n.s}/_{m^2}$.

قانون نيوتن للزوجة

لكل معدل تشكُل يتعرض له المائع، فإن الإجهاد المماسي يتناسب طردياً مع اللزوجة.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

حيث أن τ يمثل الإجهاد المماسي، و μ هو معامل اللزوجة، و $\frac{\partial u}{\partial y}$ معدل التشكُل الذي يتعرض له مائع سرعته u.

بناءً على هذا القانون صُنفت الموائع إلى:

١- موائع ينطبق عليها قانون نيوتن للزوجة وتُسمى الموائع النيوتونية.

٢- موائع لا ينطبق عليها قانون نيوتن للزوجة، نسميها موائع غير نيوتونية، ويمكن وصفها بالعلاقة التالية:

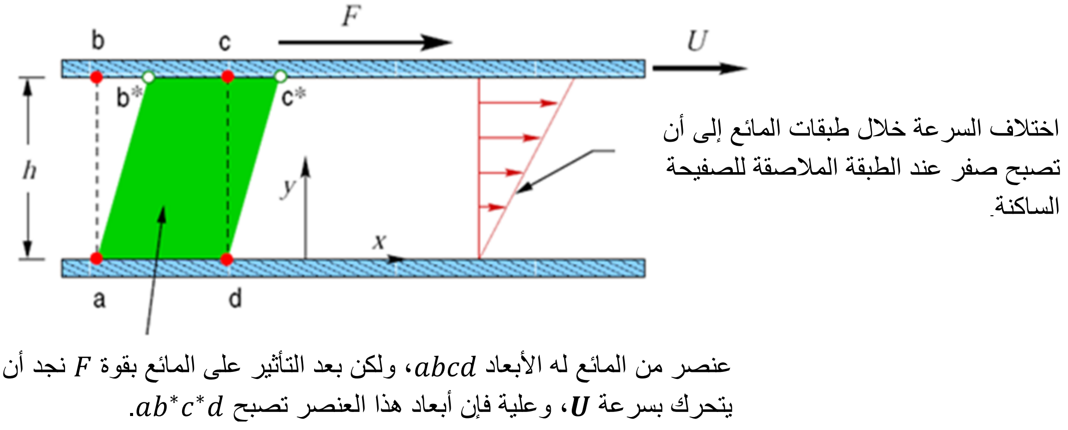
$$\tau = k \left(\frac{du}{dy}\right)^n$$

تسمى هذه العلاقة بقانون القوى، أما الموائع التي ينطبق عليها هذا القانون تُسمى بموائع قانون القوى (Power-law fluids)، حيث أن k هو مؤشر اللزوجة (consistency index)، أما n هو مؤشر تصرف التدفق (behavior index flow).

١-٢-٢ انتشار العزم (DIFFUSION OF MOMENTUM)

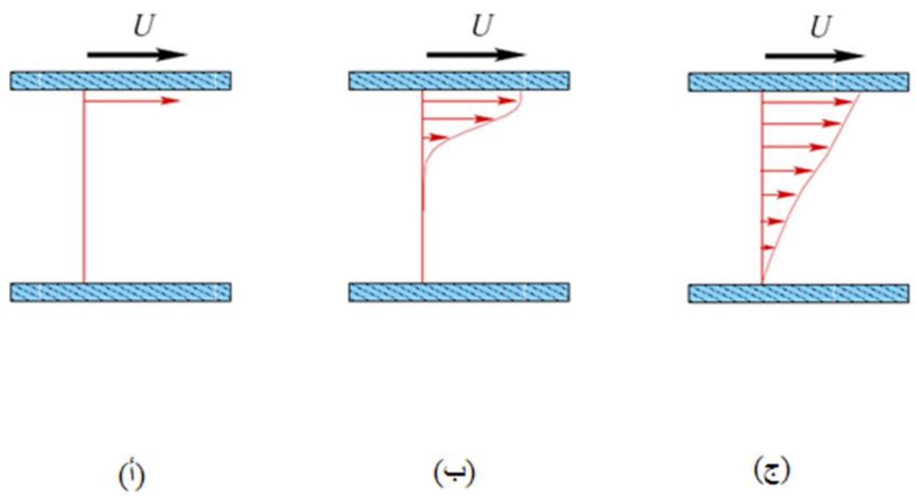
إن كلمة انتشار تعني اختلاط الجزيئات المختلفة من مادتين أو أكثر، فمثلاً لو خلطنا الملح مع الماء العذب فإننا الملح ينتشر في الماء ويذوب فيه. كما يمكننا معرفة درجة الاختلاط عن طريق معرفة مدى تركيز الملح في الماء، وبنفس الطريقة نستطيع شرح انتشار العزم والطاقة في المائع.

انتشار العزم هو اختلاط قسم من المائع ذو عزم عالي، مع قسم آخر ذو عزم أقل، وتكون النتيجة النهائية لهذا الانتشار هو تدفق سلس لسرعات المائع كما هو موضح في الشكل (١-٣). حيث نلاحظ تأثر طبقات مائع محصور بين صفيحتين متوازيتين إحداهما ثابتة والأخرى متحركة بسرعة $\boldsymbol{U}$ بسبب القوة F المؤثرة على هذه الصفيحة.



شكل(١-٣) مائع محصور بين صفيحتين إحداهما أثرت عليها قوة مقدارها F وتسببت في حركتها بسرعة $\boldsymbol{U}$. [١]

يوضح الشكل (١-٤) ثلاث مراحل زمنية لانتشار السرعة خلال طبقات المائع. وبما أن الصفيحة تتحرك بسرعة $\boldsymbol{U}$، فإن طبقة المائع الملاصقة لهذه الصفيحة لها نفس السرعة، كما هو موضح في الفقرة (أ)، أما الفقرة (ب) توضح تأثر طبقات المائع بسرعة طبقة المائع الملاصقة للصفيحة ولكن تبقى سرعتها أقل من السرعة $\boldsymbol{U}$. الفقرة (ج) تبين المرحلة النهائية لانتشار السرعة خلال طبقات المائع المحصور بين صفيحتين، ولكن يجدر الإشارة إلى أن سرعة الطبقة الملاصقة للصفيحة الساكنة تساوي صفر.



شكل(١-٤) انتشار العزم في طبقات مائع محصور بين صفيحتين إحداهما تتحرك بسرعة $\boldsymbol{U}$. فقرة (أ) تبين المرحلة الأولى والمتقدمة لهذا الانتشار. فقرة(ب) تبين المرحلة الثانية والتي تكون في فترة عابرة من الزمن. فقرة (ج) تبين المرحلة الأخيرة. [١]

١-٢-٣ التوصيل الحراري (THERMAL CONDUCTIVITY)

التوصيل الحراري هو خاصية انتقال الحرارة بواسطة جزيئات المائع، ويرتبط التوصيل الحراري بالطاقة الحرارية، حيث أن التوصيل الحراري يقيس مدى انتشار الطاقة الحرارية خلال الأوساط. العلاقة الأساسية التي تصف ارتباط التوصيل الحراري بالطاقة الحرارية هي قانون فورير للتوصيل الحراري، والذي يُكتب على الصورة:

$$q = -k\frac{dT}{dy}$$

حيث أن الرمز q يشير إلى انتشار الحرارة، بمعنى آخر q هو مقدار الحرارة لكل وحدة مساحة لكل وحدة زمن، و k هو التوصيل الحراري، أما التغير في درجة الحرارة باتجاه محور y فإننا نرمز له بالرمز dT/dy. نلاحظ أن قانون التوصيل الحراري شبيه بقانون نيوتن للزوجة باستثناء الإشارة السالبة.

١-٢-٤ الكثافة (DENSITY)

الكثافة هي كمية الكتلة لكل وحدة حجم، وتُعطى بالقانون التالي:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

حيث m كتلة المائع، و V حجم المائع. وتكون وحدة الكثافة هي جرام لكل متر مكعب وتُرَمز بالرمز g/m^3.

١-٢-٥ الضغط (PRESSURE)

يتأثر سطح المائع بقوى مختلفة، منها الضغط وهو القوة العامودية المؤثرة على وحدة السطح. من هذا التعريف فإن وحدة الضغط تُعطى بدلالة القوة والمساحة:

$$p \sim \frac{F}{L^2}$$

وتكون وحدة الضغط هي نيوتن لكل متر تربيع وتُرَمز بالرمز n/m^2.

١-٣ أنواع تدفق المائع (TYPES OF FLUID FLOW)

من الممكن تصنيف تدفق الموائع كالآتي:

١- تدفق مستقر وتدفق غير مستقر.

٢- تدفق منتظم وتدفق غير منتظم.

٣- تدفق دوراني وتدفق غير دوراني.

٤- التدفق اللزج والتدفق غير اللزج.

٥- تدفق قابل للانضغاط وتدفق غير قابل للانضغاط.

٦- تدفق طبقي وتدفق مضطرب.

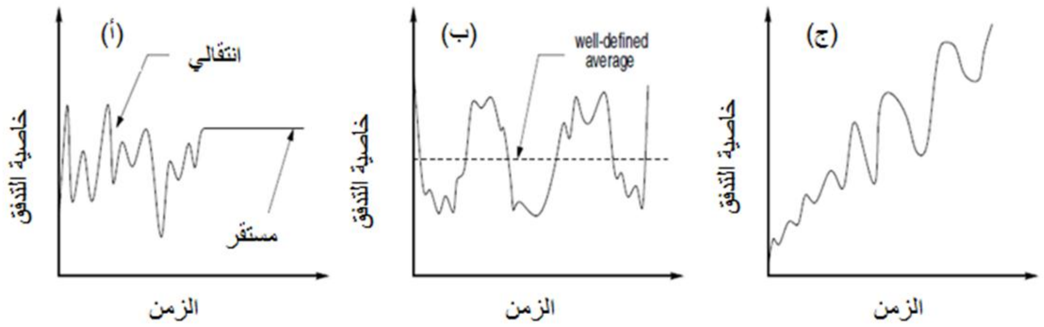
١-٣-١ التدفق المستقر وغير المستقر (STEADY AND UNSTEADY FLOW)

جميع خصائص المائع تعتمد على الزمن، وعلى موقعها في الفراغ الثلاثي (x, y, z) وبالتالي فهي دوال في المتغيرات x وy وz وt، ونرمز للخاصية بالرمز $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$.

إذا كانت جميع خصائص المائع عند التدفق مستقلة عن الزمن، أي أن خصائصه لا تتغير مع تغير الزمن t وتبقى ثابته، نسمي التدفق في هذه الحالة بالتدفق المستقر. أي أن رياضياً الخاصية تحقق المعادلة:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mathrm{t}}\right) = 0$$

أما التدفق غير المستقر هو التدفق الذي تتغير خصائصه بالنسبة للزمن t. يوضح الشكل (١-٥) الفقرة (أ) تدفق غير المستقر للمائع بحيث يكون في وضع انتقالي ثم يستقر بعد مرور فترة من الزمن. بينما في الشكل (١-٥) الفقرة (ب) نشاهد تدفق غير مستقر للمائع ولكنه على نفس النمط تقريباً (*stationary*). أما في الشكل (١-٥) فقرة (ج) فإننا نجد أن تدفق المائع يتغير كلياً مع الزمن، لذلك هو تدفق غير مستقر.



شكل(١-٥) اعتماد تدفق المائع على الزمن: (أ) تدفق انتقالي متبوع بتدفق مستقر، (ب) غير مستقر ولكن متقلب على نمط واحد تقريباً، (ج) تدفق غير مستقر. [١]

١-٣-٢ التدفق المنتظم وغير المنتظم (UNIFORM AND NON-UNIFORM FLOW)

يُعرف التدفق المنتظم بأنه هو التدفق الذي تكون فيه متجهات السرعة متساوية في المقدار والاتجاه عند كل نقطة في التدفق ولأي لحظة معينة من الزمن، وإذا كان التدفق لا يحقق هذا التعريف فيسمى بالتدفق غير المنتظم.

نُعبر عن التدفق المنتظم بالعلاقة الرياضية التالية:

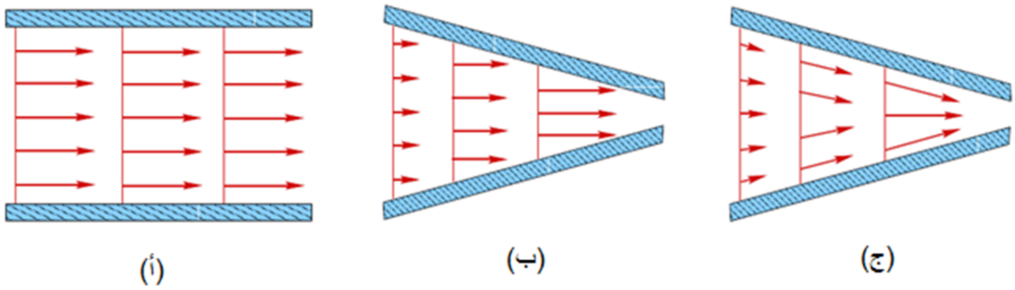
$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن $\boldsymbol{U}$ هو متجه السرعة، و$\boldsymbol{s}$ يمثل متجه عشوائي يشير إلى الاتجاه الذي نحسب التفاضل بالنسبة إليه، على سبيل المثال $\boldsymbol{s}$ قد يكون أي متجه من متجهات الإحداثيات، أوأي متجه آخر. حتى يكون التدفق منتظماً فإن تفاضل السرعة $\boldsymbol{U}$ بالنسبة للاتجاه $\boldsymbol{s}$ يساوي صفر في كل مكان، أي أن السرعة $\boldsymbol{U}$ تكون ثابتة.

التعريف السابق يوضح أن بُعد التدفق المنتظم يجب أن يساوي صفر، وبالتالي هو لا يعتمد على الإحداثيات المكانية.

لتوضيح الفرق بين التدفق المنتظم والتدفق غير المنتظم نلاحظ الشكل (١-٦) فقرة (أ) حيث توضح التدفق المنتظم، بمعنى أن جميع متجهات السرعة لها نفس المقدار ونفس الاتجاه. بينما الشكل (١-٦)

الفقرة (ب) توضح مائع يتدفق بسرعات مختلفة في المقدار ولكنها في نفس اتجاه تدفق المائع، من ناحية أخرى نجد أن السرعة لها نفس المقدار في أي موقع x، ويُسمى هذا النوع من التدفق بالتدفق المنتظم محلياً، ولكن هذه الحالة من هذا النوع من التدفق المنتظم لا تتوافق مع التدفق الفيزيائي الحقيقي ولكنها مفيدة وجيدة في بعض الظروف. أما الشكل (١-٦) الفقرة (ج) توضح التدفق غير المنتظم، وهو أقرب لحقيقة التدفق الفيزيائي، في الواقع معظم التدفقات الحقيقية تكون غير منتظمة.



شكل(١-٦) يوضح التدفقات المنتظمة والتدفقات غير المنتظمة. [١]

١-٣-٣ التدفق الدوراني وغير الدوراني (ROTATIONAL AND IRROTATIONAL FLOW)

حدسياً يمكننا الاعتقاد أن التدفقات الدورانية أو الدوامية هي تلك التدفقات التي تحتوي على دوامات، أي أن جزيئات المائع تدور حول مراكز كتلتها أثناء تدفق المائع، والتدفقات التي لا تحتوي على مثل هذه الدوامات نعتبرها تدفقات غير دورانية، ويُعرف رياضياً كالتالي:

حقل التدفق الذي له متجه سرعة $\boldsymbol{U}$ يكون دوراني إذا كان حاصل ضرب متجه التفاضلات بمتجه السرعة لا يساوي الصفر

$$curl\boldsymbol{U} \neq 0$$

أما التدفقات التي لا تحقق هذا الشرط يطلق عليها تدفقات غير دورانية.

لكي نتمكن من فهم هذا التعريف بشكل واضح ندرج التعريف الآتي:

إذا كانت $\boldsymbol{F}$ حقل اتجاهي يقع في الفراغ الثلاثي، حيث أن $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$، فإن حاصل ضرب متجه التفاضلات بالمتجه $\boldsymbol{F}$ يُعطى بالقانون التالي:

$$curl\ \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{F}_1(x,y,z), \boldsymbol{F}_2(x,y,z), \boldsymbol{F}_3(x,y,z))$$

١-٣-٤ التدفق اللزج وغير اللزج (VISCOUS AND INVISCID FLOW)

من الحقائق الفيزيائية أن جميع الموائع تمتلك خاصية اللزوجة، لكن في بعض حالات التدفق نجد أن القوى المؤثرة على عناصر المائع والناشئة عن اللزوجة تكون صغيرة مقارنة مع القوى الأخرى وبالتالي نستطيع إهمال تأثير اللزوجة.

لو درسنا حالة تدفق مائع ذو لزوجة صغيرة، مثل تدفق غاز عند درجة حرارة منخفضة، نجد أن الإجهاد المماسي على المائع يكون صغير نسبياً، وهذا ما يتضح من المعادلة $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ وبالتالي فإن القوى المماسية المقابلة تكون صغيرة، ولو افترضنا أن قوى الضغط تكون كبيرة مقارنة بالقوى المماسية، فإن التدفق في هذه الحالة هو تدفق غير لزج، ونهمل تأثير اللزوجة. في حالات التدفق الأخرى نلاحظ التأثير الكبير للزوجة على تدفق المائع بحيث لا نستطيع إهمال هذا التأثير، ونسمي التدفق في هذه الحالة بالتدفق اللزج.

١-٣-٥ التدفق القابل للانضغاط وغير القابل للانضغاط (INCOMPRESSIBLE AND COMPRESSIBLE FLOW)

إن التدفق غير القابل للانضغاط هو التدفق الذي تكون فيه كثافة المائع (ρ) ثابتة بالنسبة لتدفق المائع. رياضياً:

$$\rho = constant$$

بصفة عامة يعتبر تدفق السوائل تدفق غير قابل للانضغاط. أما التدفق القابل للانضغاط هو التدفق الذي تتغير فيه كثافة المائع (ρ) من نقطة إلى أخرى، أو بعبارة أخرى الكثافة لا تكون ثابتة لهذا التدفق.

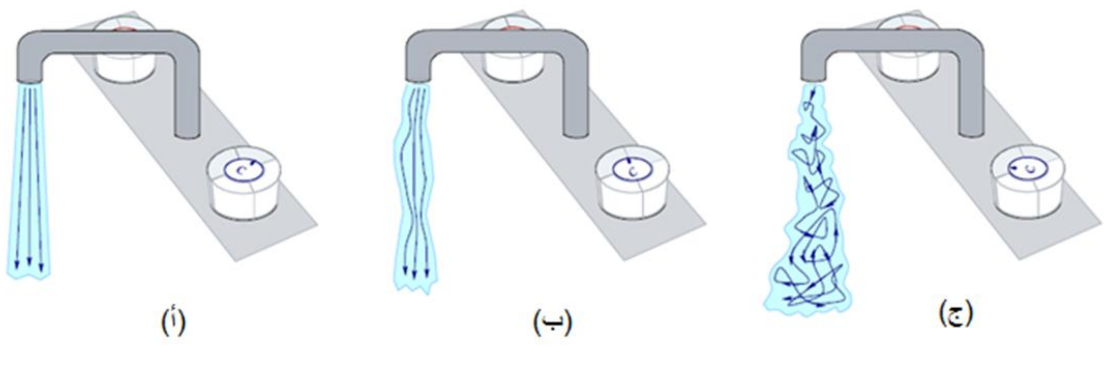
رياضياً:

$$\rho \neq constant$$

١-٣-٦ التدفق الطبقي والمضطرب (LAMINAR AND TURBULENT FLOW)

تجربتنا الأكثر شيوعاً للتمييز بين التدفق الطبقي والتدفق المضطرب تأتي من ملاحظة تدفق المياه من الصنبور اثناء زيادتنا لمعدل تدفق الماء من الصنبور، لتوضيح ذلك نتصور هذا في الشكل (١-٧).

الفقرة (أ) من الشكل (١-٧) توضح تدفق طبقي ذو سرعة منخفضة نسبياً حيث تتبع فيه جزيئات المائع مسارات منتظمة وسلسة، كما أنه لا يوجد ما يشير إلى أن هذه المسارات قد تظهر تغييرات كبيرة في الاتجاه. أما الفقرة (ب) من الشكل (١-٧) توضح أن التدفق مازال تدفق طبقي، لكن في هذه الحالة قمنا بزيادة معدل تدفق الماء من الصنبور أكثر مما كانت عليه في الحالة السابقة عن طريق زيادة فتح الصبور، ونلاحظ أن سطح تدفق الماء يظهر موجات تتغير بالنسبة للزمن، وبذلك يكون هذا النوع من التدفق معتمد على الزمن، لكن لا يوجد حتى الآن تداخل في المسارات. أخيراً الفقرة (ج) من الشكل (١-٧) توضح تدفق مضطرب ناتج عن السرعة العالية جداً مقارنة بالسرعة في الحالتين السابقتين لتدفق الماء من الصنبور، حيث أن المسارات التي تتبعها جزيئات المائع معقدة جداً ومتشابكة، ومثل هذه التدفقات تكون ثلاثية الأبعاد وتعتمد على الزمن.



شكل (١-٧) يوضح التدفق الطبقي والتدفق المضطرب للماء من الصنبور. [١]

١-٤ تعاريف ونظريات وقوانين

١-٤-١ معادلات الحالة (EQUATION OF STATE)

تهدف معادلات الحالة إلى ربط خصائص المائع بعضها ببعض، مما يساعد في زيادة وصف تدفق هذا المائع، ومعادلة الحالة هي معادلة تصف العلاقة بين خواص المائع مثل الكثافة والضغط ودرجة الحرارة. يمكن لهذه المعادلات وصف حالة النظام وطريقة تغيره. تستخدم معادلات الحالة لمعرفة خواص الغازات والسوائل ومخلوطات السوائل وكذلك خواص المادة الصلبة.

١-٤-٢ نظرية غاوس للتباعد (GAUSS'S THEOREM)

التكامل لأي حقل مُتجه $\boldsymbol{F}$ على المنطقة V حيث $V \subseteq \mathbb{R}^3$، فإن تكامل الحقل $\boldsymbol{F}$ على السطح S يساوي:

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} . \boldsymbol{F} dV = \int_S \boldsymbol{F} . \boldsymbol{n} \, dA$$

١-٤-٣ قوانين نيوتن للحركة

قانون نيوتن الأول للحركة

يظل الجسم على حالته الحركية (إما السكون التام أو التحرك في خط مستقيم بسرعة ثابتة) ما لم تؤثر عليه قوة تغيره من هذه الحالة.

$$\sum F = 0$$

قانون نيوتن الثاني للحركة

إذا أثرت قوة F أو مجموعة قوى $\sum F$ على جسم ما فإنها تكسبه تسارعاً a، يتناسب مع محصلة القوى المؤثرة، ومعامل التناسب هو كتلة القصور الذاتي للجسم m، أي أن:

$$\sum F = m . a$$

قانون نيوتن الثالث للحركة

لكل قوة فعل قوة رد فعل، مساويه لها في المقدار ومعاكسه لها في الاتجاه.

١-٤-٤ القانون الأول للديناميكا الحرارية

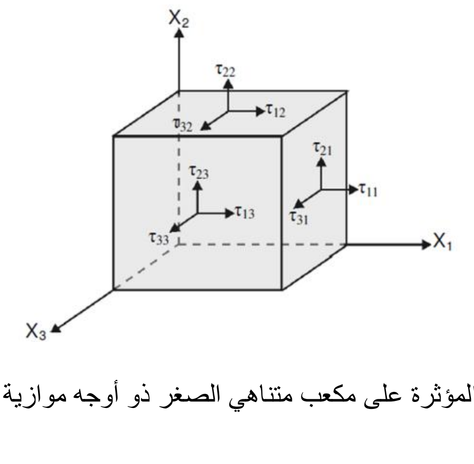
كمية الحرارة التي يكتسبها أو يفقدها النظام تساوي مجموع التغير في الطاقة الداخلية للنظام والشغل الذي يبذله النظام.

١-٤-٥ مصفوفة الإجهاد (STRESS TENSOR)

مصفوفة الإجهاد هي مصفوفة عناصرها مرتبطة بالاتجاهات، بحيث i يمثل اتجاه القوة و j يمثل السطح الذي تؤثر عليه القوة. ينقسم الإجهاد على مائع إلى نوعين:

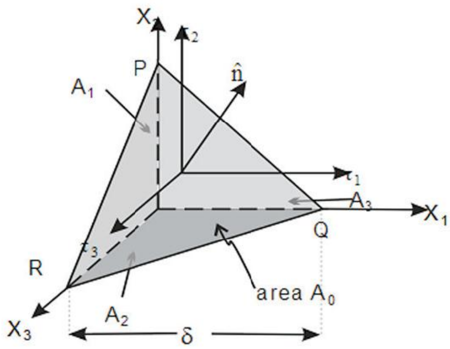
١- الإجهاد العامودي (normal stress): هو القوة العامودية على وحدة مساحة السطح.
٢- الإجهاد المماسي (shear stress): قوة مماسية تؤثر على وحدة مساحة السطح.

لو أخذنا مكعب متناهي الصغر في الفراغ، بحيث تكون أوجهه موازية لمحاور المستوى الإحداثي X_1, X_2, X_3، فإن شكل (١-٨) يوضح عناصر مصفوفة الإجهاد.



شكل (١-٨) الإجهادات المؤثرة على مكعب متناهي الصغر ذو أوجه موازية لمحاور المستوى الإحداثي.

لنأخذ مجسم صغير جداً، سطحه PQR، ولنفرض مساحة سطحه هي $A_\circ$ أنظر شكل (١-٩).

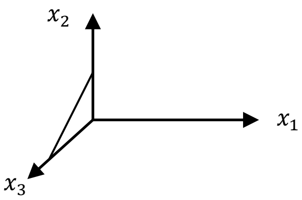


شكل (١-٩) يوضح مجسم متناهي الصغر سطحه PQR وغير عامودي على أي من المحاور الإحداثية.

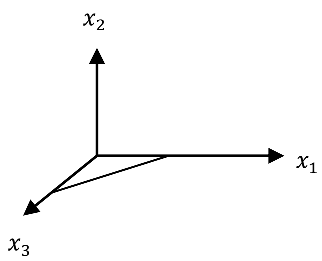
فإن مساحة أسطح المجسم العامودية على x_i تحسب بالقانون:

$A_i = A_\circ n_i$، حيث $i = 1,2,3$، و $\boldsymbol{n}$ متجه الوحدة العامودي، إذاً:

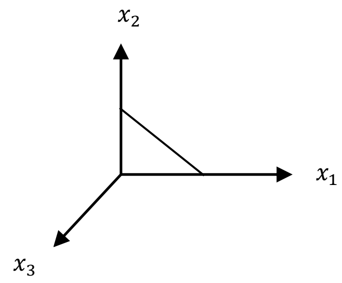
مساحة السطح العامودي على x_1 تساوي: $A_1 = A_\circ n_1$



مساحة السطح العامودي على x_2 تساوي: $A_2 = A_\circ n_2$



مساحة السطح العامودي على x_3 تساوي: $A_3 = A_\circ n_3$



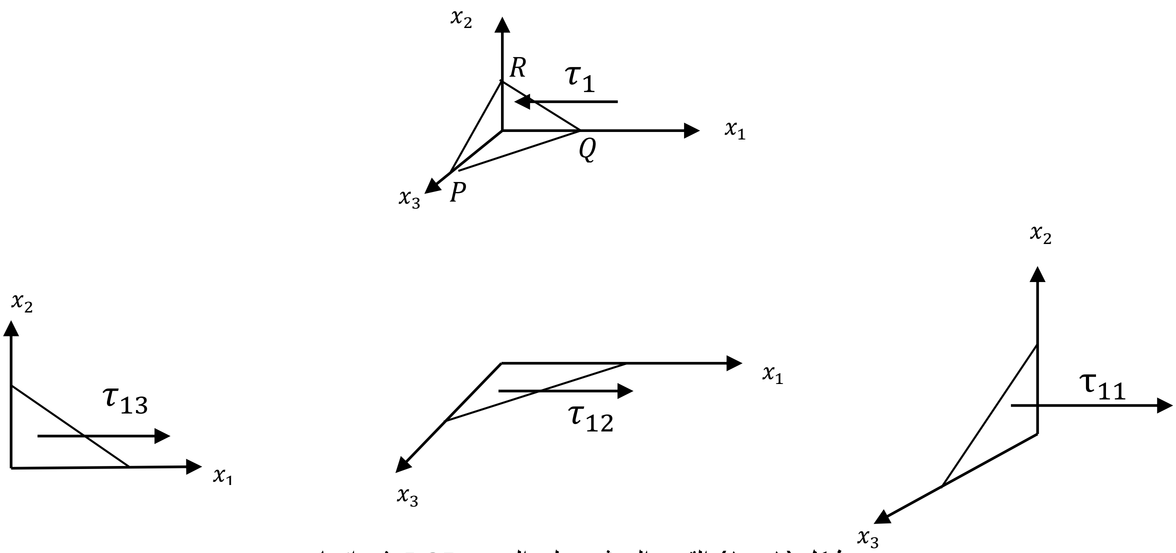
تنقسم القوى المؤثرة على كتلة المائع بشكل عام إلى نوعين: قوى مؤثرة على الحجم، و قوى مؤثرة على السطح. عندما يكون المائع في حالة سكون، فإن مجموع القوى المؤثرة على الحجم والقوى المؤثرة على السطح في حالة اتزان أي متساوية.

بما أن حجم المجسم PQR متناهي في الصغر فإن القوى المؤثرة على الحجم تساوي الصفر، وبذلك فإن مجموع القوى المؤثرة على أسطح المجسم PQR تساوي الصفر.

إذاً في حالة الاتزان نجد أن القوى المؤثرة على السطح PQR ومقدارها $A_\circ \tau_i$ تساوي مجموع القوى المؤثرة على الأسطح العامودية للمجسم الباقية، ورياضياً:

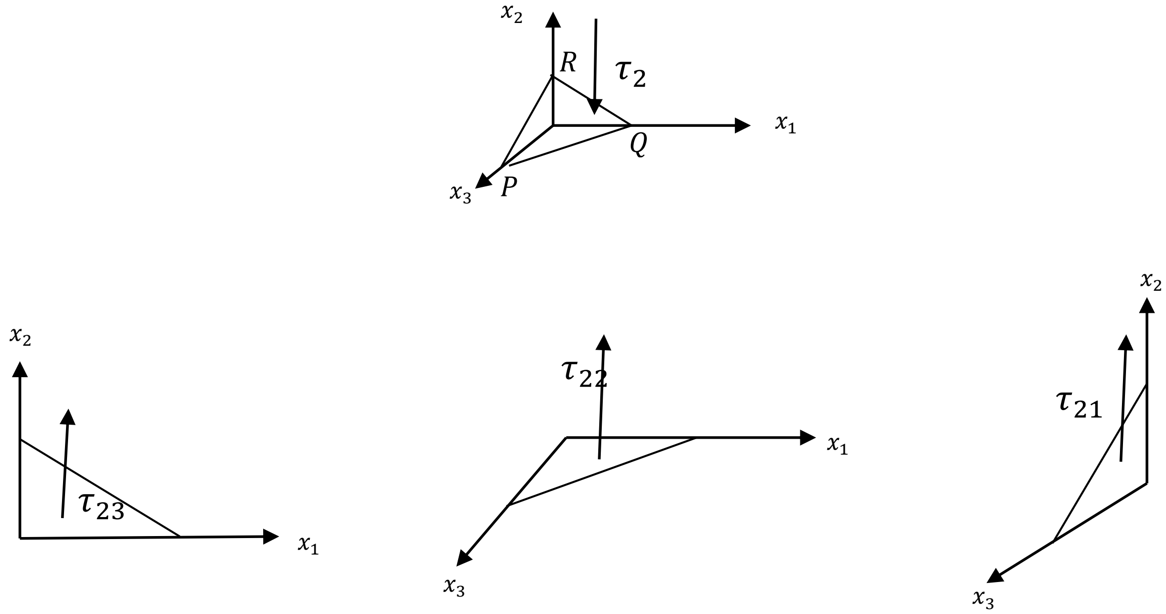
$$\tau_i A_\circ = \tau_{i1} A_1 + \tau_{i2} A_2 + \tau_{i3} A_3$$

أي في اتجاه x_1 تكون: $\tau_1 A_\circ = \tau_{11} A_1 + \tau_{12} A_2 + \tau_{13} A_3$



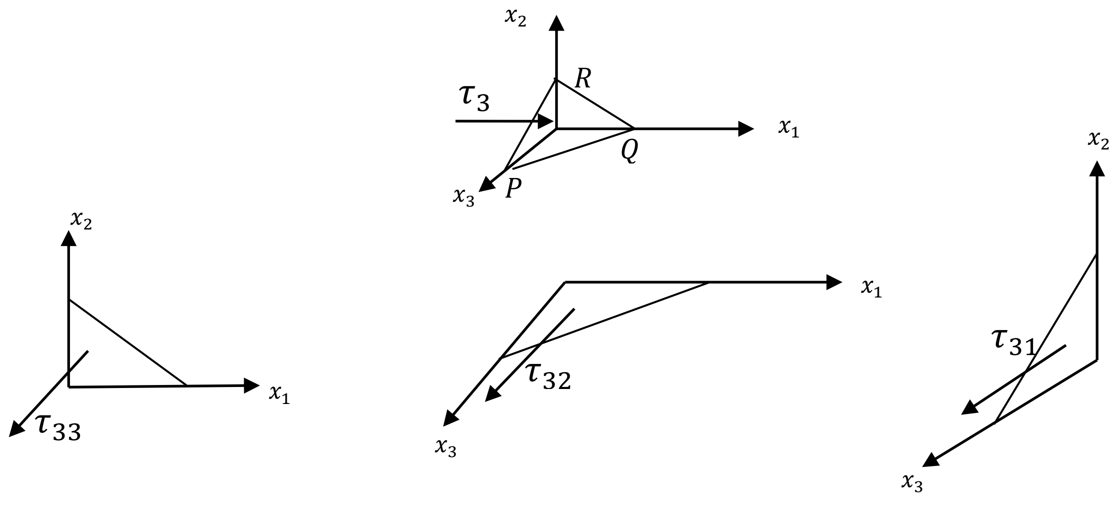
شكل (١-١٠) القوى المؤثرة على المجسم PQR في اتجاه x_1

وفي اتجاه x_2 تكون:
$$\tau_2 A_\circ = \tau_{21} A_1 + \tau_{22} A_2 + \tau_{23} A_3$$



شكل (١-١١) القوى المؤثرة على المجسم PQR في اتجاه x_2

وفي اتجاه x_3 تكون:
$$\tau_3 A_\circ = \tau_{31} A_1 + \tau_{32} A_2 + \tau_{33} A_3$$



شكل (١-١٢) القوى المؤثرة على المجسم PQR في اتجاه x_3

وبصيغة عامة $\tau_i A_\circ = \tau_{ij} A_j$ ولكن $A_\circ n_i = A_i$، إذاً:

$$\tau_i A_\circ = \tau_{ij}\left(A_\circ n_j\right) \quad \Rightarrow \quad \tau_i = \tau_{ij} n_j$$

وتمثل τ_i متجه الإجهاد أو الضغط في اتجاه x_i و τ_{ij} عناصر مصفوفة الإجهاد.

الباب الثاني

معادلات تحكم حركة المائع

٢-٠ مقدمة

إن ميكانيكا الموائع هو العلم المتفرع من العلوم الطبيعية (الفيزياء) والمتعلق بدراسة السوائل والغازات في حالة السكون والحركة.

ويتفرع إلى:

١- **استاتيكا الموائع:** يختص مجال استاتيكا الموائع بدراسة حالات وخواص الموائع الساكنة مثل مياه برك السباحة والخزانات والسدود وغيرها.

٢- **ديناميكا الموائع:** يختص مجال ديناميكا الموائع بدراسة خواص الموائع أثناء الحركة مثل مياه البحار والأنهار والأحوال المناخية وحركة الرياح والأمطار والأعاصير والدوامات والسيول وسريان السوائل والغازات في المواسير والأجهزة الميكانيكية مثل المضخات وضاغطات الغازات والمراوح ومحركات السيارات والديزل وغيرها كثير.

سندرس في هذا الباب حركة المائع، وكيف نستطيع وصفها من خلال المعادلات التي تحكم تدفق المائع. يتناول الفصل الأول طرق وصف حركة المائع، وفي الفصل الثاني نتعرف على الإطارات المرجعية المعتمدة على إحداثيات أويلر أو المعتمدة على إحداثيات لاجرانج، وفي الفصل الثالث نوجد العلاقة بين تفاضلات لاجرانج وتفاضلات أويلر. نعرف في الفصل الرابع الحجم المعين للمائع، وفي الفصل الخامس نوجد العلاقة بين الحجم المعين وإحداثيات لاجرانج بتحويلة رونالد. أما في الفصول السادس والسابع والثامن سنتعرف على مبادئ الحفظ الثلاثة: الكتلة والعزم والطاقة، على التوالي. أيضاً ندرس الدوران وتأثير القوى المماسية في الفصل التاسع، ونتحدث في الفصل العاشر عن المعادلات التأسيسية. بينما يتناول الفصل الحادي عشر معاملات اللزوجة، والفصل الثاني عشر معادلات نافير- ستوكس. يتضمن الفصل الثالث عشر معادلة الطاقة، حيث نتوصل إلى المعادلات التي تحكم تدفق المائع في الفصل الرابع عشر، وفي الفصل الخامس عشر نتطرق بشكل مبسط عن الشروط الحدية.

٢-١ طرق وصف حركة المائع

توجد طريقتان أساسيتان للنظر إلى حركة الموائع وهما:

١- الطريقة الاستمرارية (CONTINUUM METHOD)

تعتمد الطريقة الاستمرارية في دراسة حركة الموائع على اعتبار أن المائع وسط متصل فلا يُنظر إلى جزيئات المائع بحد ذاتها، وإنما يُنظر للمائع كوحدة واحدة. تسمى الميكانيكا في حالة طريقة الاستمرارية بميكانيكا الأوساط المتصلة.

٢- الطريقة الإحصائية (STATISTICAL METHOD)

تعتمد الطريقة الإحصائية على حقيقة أن المائع مكون من جزيئات تتحرك حركة انتقالية ودورانية وتذبذبية في الفراغ، حيث يتم النظر إلى جزيئات المائع بحد ذاتها، ووصف حركة المائع بحركة جزيئاته.

من الناحية العلمية وُجِد أن الطريقة الإحصائية لوصف حركة الموائع تكون ضرورية فقط في حالة الأوساط المخلخلة (Rarefied gas)، بينما يكون من المناسب استخدام طريقة الاستمرارية لوصف حركة بقية الموائع، ولتحقيق الهدف المنشود من هذا البحث نستخدم طريقة الاستمرارية لوصف حركة المائع في الفراغ.

لتكن كثافة المائع ρ وسرعة المائع $\boldsymbol{u}$ دوال في الزمن t والإحداثيات في الفراغ الثلاثي (x, y, z)، حيث يمكن التعبير عنهما رمزياً كالتالي:

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

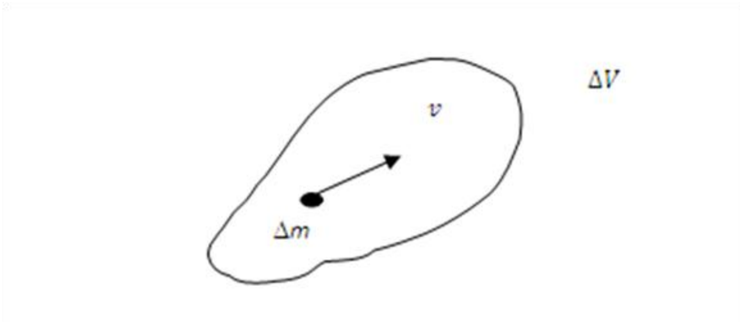
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y, z, t)$$

من منطلق مبدأ الاستمرارية فإن الخصائص الفيزيائية للمائع عند نقطة ما في الفراغ، يمكن اعتبارها أنها متغيرات متصلة، وتُعرَّف بدلالة الخواص الفيزيائية لجزيئات المائع والتي تشغل حيز ذا حجم صغير حول هذه النقطة.

إذا اعتبرنا أن حجم صغير من المائع نرمز له بالرمز ΔV كما هو موضح في شكل (٢-١)، بحيث يحتوي على عدد كبير من الجزيئات، فإنه يمكننا حساب كثافة وسرعة نقطة ما في هذا الحجم ΔV بالقوانين التالية:

$$\rho = lim_{\Delta V \to \varepsilon}\left(\frac{\sum \Delta m}{\Delta V}\right)$$

$$\boldsymbol{u} = lim_{\Delta V \to \varepsilon}(\frac{\sum v\Delta m}{\sum \Delta m})$$



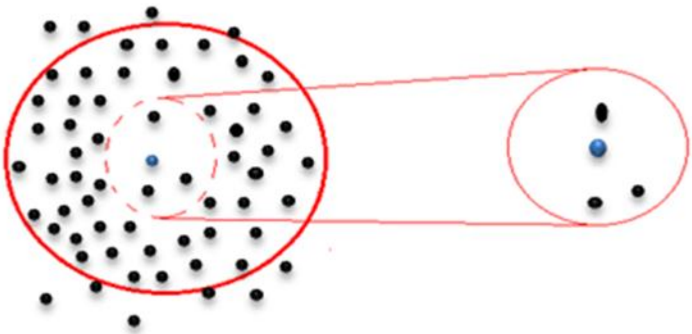
شكل(٢-١) يوضح جزيء من الحجم المعين ΔV كتلته Δm وسرعته v. [٢]

حيث أن Δm كتلة جزيء واحد، وv تساوي سرعة هذا الجزيء، و ε هو حجم صغير نسبياً ولكنه كافي لاستيعاب عدد كبير من الجزيئات. لنتمكن من استخدام الطريقة الاستمرارية يجب تحقيق الشرط التالي:

$$\frac{1}{n} \ll \varepsilon \ll L^3$$

حيث n عدد الجزيئات لكل وحدة حجم، و المقدار $\frac{1}{n}$ هو حجم جزء من المائع يحتوي فقط على جزيء واحد، L أصغر وحدة طول ذات معنى في حقل جريان المائع ومنه فإن L^3 هو أقل قيمة يصل إليها حجم جريان المائع.

مبدأ الاستمرارية متحقق في حالة كان الحجم ε أكبر من حجم جزيء واحد من المائع، وفي نفس الوقت يكون الحجم ε أصغر من المكعب الذي طول حرفه L وهو وحدة مجهرية صغيرة انظر الشكل (٢-٢).



شكل (٢-٢) على اليمين حجم غير مناسب لتحقيق مبدأ الاستمرارية..على اليسار حجم مناسب لتحقيق مبدأ الاستمرارية. [١]

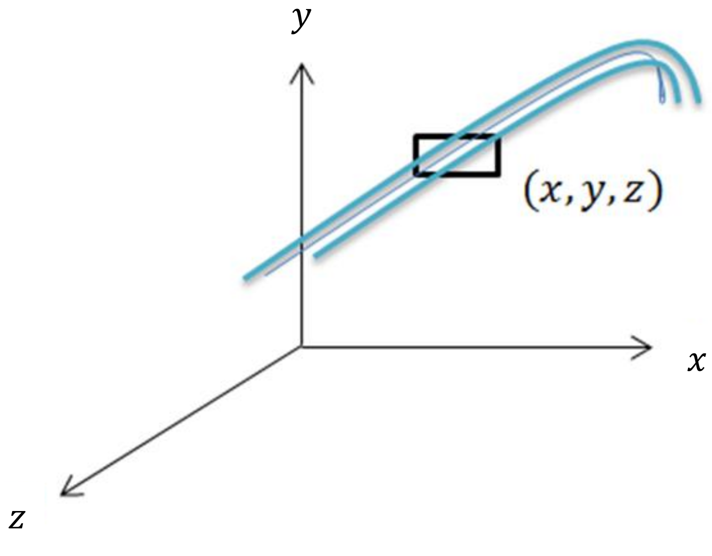
بما أن مكعب من الغاز طول ضلعه 2 مايكرومتر في درجة حرارة وضغط طبيعيان، يحتوي على $10^8 \times 2$ جزيء، وأيضاً مكعب من السائل طول ضلعه 2 مايكرومتر يحتوي على $10^{11} \times 2$ جزيء، فإن تطبيق النظرية الاستمرارية مناسباً لوصف حركة أغلب الموائع.

٢-٢ إحداثيات أويلر (EULERIAN COORDINATES)، وإحداثيات لاجرانج (LAGRANGIAN COORDINATES)

عندما يتحرك جسم ما في الفراغ فلابد من إطار مرجعي (framework) لوصف حركته بحيث يتم تحديد موقع الجسم بإحداثيات (x, y, z) في زمن ما t.
يوجد نوعان من الإحداثيات لدراسة حركة الموائع، نلخصها فيما يلي:

٢-٢-١ إحداثيات أويلر (EULERIAN COORDINATES)

يعتبر المرجع الإحداثي الذي يعتمد على إحداثيات أويلر شائعاً، حيث يعتمد الإطار المرجعي لإحداثيات أويلر على التركيز على المائع المار خلال حجم معين ثابت في الفراغ، كما هو موضح في الشكل (٢-٣)، حيث أن المتغيرات المستقلة هي إحداثيات الفراغ الثلاثي x و y و z، بالإضافة إلى الزمن t.



شكل (٢-٣) دراسة جزيئات المائع المار خلال بالنقطة (x, y, z).

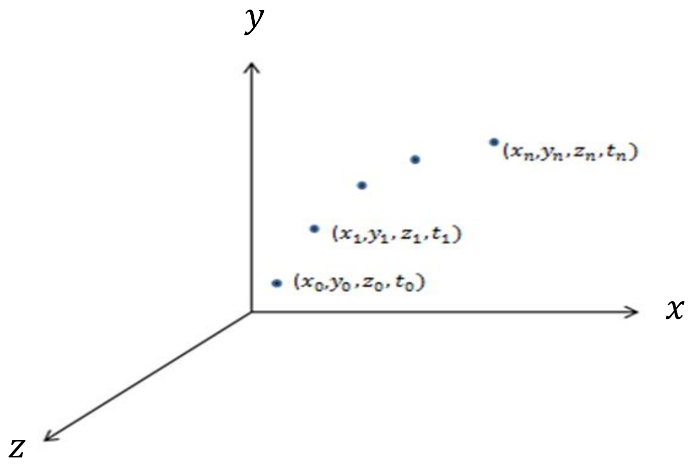
يحمل المائع المار بالحجم المعين جزيئات مختلفة خلال أزمنة مختلفة، والتي تعبر من خلال الحجم المعين أثناء جريان المائع.

إذا استنتجنا مبادئ الحفظ الأساسية، وهي مبدأ حفظ الكتلة، ومبدأ حفظ العزم، ومبدأ حفظ الطاقة، استناداً إلى المائع المار خلال حجم معين ثابت في الفراغ، فإن معادلات الحفظ تكون مبنية على إحداثيات أويلر.

٢-٢-٢ إحداثيات لاجرانج (LAGRANGIAN COORDINATES)

تعتمد إحداثيات لاجرانج على تتبع مسار كتلة معينة من المائع أثناء جريان المائع، لو استطعنا تعيين هذه الكتلة وتلوينها بحيث لا تتغير كثافتها، فإننا أثناء الدراسة نتبع مسار هذه الكتلة الملونة وموقعها أينما وُجِدَت في حقل جريان المائع، وكيفما تغير شكلها.

إذا استطعنا تعيين أول موقع إحداثي تواجدت فيه كتلتنا الملونة وليكن $x_\circ$ و $y_\circ$ و $z_\circ$، عند الزمن $t_\circ$، وبما أن الكتلة التي سبق تحديدها تجري في حقل جريان المائع، إذاً فإن موقعها الإحداثي يتغير إذا ما أُخِذ في أزمنة مختلفة كما هو موضح في الشكل (٢-٤). ونستطيع هنا معرفة موقعها بعد مرور فترة لاحقة من الزمن t بشرط أن تكون مركبات السرعة u و v و w معروفة.



شكل (٢-٤) مسار جزيء المائع الذي تتم دراسته خلال جريانه في الفراغ.

في هذا الإطار المرجعي المتغيرات x و y و z ليست متغيرات مستقلة بعد الآن، وإنما هي دوال في الزمن t، أي أنها متغيرات معتمدة على الزمن t. أما بالنسبة للمتغيرات المستقلة فهي الإحداثيات $x_\circ$ و $y_\circ$ و $z_\circ$ و الزمن t.

إن استخدام الإطار المرجعي الذي يعتمد على احداثيات أويلر أو إحداثيات لاجرانج يعتبر مسألة اختيارية. في هذا البحث سنعتمد على إحداثيات لاجرانج كإطار مرجعي في استنتاج قوانين الحفظ الثلاثة. حيث يتم تعيين جزء من المائع وتعقب حركته خلال جريان المائع في الفراغ وذلك خلال فترة من الزمن ودراسة التغيرات التي تطرأ على خصائصه خلال هذه الفترة.

بالرغم من أننا سنستخدم الإطار المرجعي لإحداثيات لاجرانج إلا أننا في بعض الأحيان سنتطرق للإطار المرجعي لإحداثيات أويلر، وسيوضح الفصل التالي العلاقة بين تفاضلات أويلر وتفاضلات لاجرانج.

٢-٣ تفاضلات اساسية (MATERIAL DERIVATIVE)

لو اعتبرنا أن α خاصية من خصائص المائع مثل الكثافة أو درجة الحرارة على سبيل المثال، فإن α هي دالة في المتغيرات المستقلة x و y و z و t بناءً على إحداثيات أويلر ويكون التغير في α حسب احداثيات أويلر يساوي:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}\delta t+\frac{\partial \alpha}{\partial x}\delta x+\frac{\partial \alpha}{\partial y}\delta y+\frac{\partial \alpha}{\partial z}\delta z$$

أما إذا حددنا عنصر معين من المائع و لاحظنا حركته وتدفقه خلال فترة قصيرة من الزمن δt، ، فإن موقعه يتغير بمقدار δx و δy و δz، بينما α تتغير بمقدار $\delta\alpha$. وقد علمنا سابقاً أن المتغيرات المستقلة في إحداثيات لاجرانج هي $x_\circ$ و $y_\circ$ و $z_\circ$ والتي تمثل الإحداثيات الإبتدائية لعنصر المائع الذي نلاحظه، بالإضافة إلى الزمن t. أي أن الإحداثيات x و y و z هي دوال في المتغير t وبذلك يكون التغير في α هو $\delta\alpha$ حسب إحداثيات لاجرانج.

بما أن التغير في α حسب إحداثيات أويلر يساوي التغير الحاصل فيها حسب إحداثيات لاجراج، إذاً:

$$\delta\alpha=\frac{\partial \alpha}{\partial t}\delta t+\frac{\partial \alpha}{\partial x}\delta x+\frac{\partial \alpha}{\partial y}\delta y+\frac{\partial \alpha}{\partial z}\delta z$$

بقسمة طرفي المعادلة السابقة على δt :

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t}=\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t}$$

المعادلة السابقة تصف لنا تغير α بالنسبة للزمن t، و هذا الوصف مستند على كلاً من إحداثيات أويلر وإحداثيات لاجرانج، ويمثل الطرف الأيسر التغير الكلي الحاصل في α بالنسبة للزمن t.

عند حساب نهاية كلاً من طرفي المعادلة عندما $\delta t\to 0$ فإن هذا يساوي - حسب تعريف التفاضل - تفاضل α بالنسبة للزمن t ونرمز له بالرمز $\mathrm{D}\alpha/_{\mathrm{Dt}}$، كما أن المقادير $\left(\frac{\delta x}{\delta t},\frac{\delta y}{\delta t},\frac{\delta z}{\delta t}\right)$ عندما $\delta t\to 0$ تمثل مركبات السرعة $\boldsymbol{U}=(u,v,w)=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$.

وبالتالي يمكننا كتابة التغير في α على الشكل:

$$\frac{D\alpha}{Dt}=\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial \alpha}{\partial x}u+\frac{\partial \alpha}{\partial y}v+\frac{\partial \alpha}{\partial z}w$$

التعبير عن المعادلة السابقة في صورة متجهات يكون على الشكل التالي:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\boldsymbol{U}.\boldsymbol{\nabla})\alpha \qquad (2.1)$$

حيث أن

$$\boldsymbol{\nabla}\alpha = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)$$

كما نستطيع كتابة المعادلة (2.1) على شكل مصفوفة (Tensor) كالتالي:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_k \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} \qquad k = 1,2,3 \qquad (2.2)$$

توضح المعادلة (2.2) مقدار التغير الكلي الحاصل في α، حيث أن هذا التغير تمت ملاحظته أثناء دراسة كتلة معينة من المائع، وهذا ما يعنيه الطرف الأيسر من المعادلة $\frac{D\alpha}{Dt}$، أما الطرف الأيمن يبين لنا مقدار التغير الحاصل في α استناداً على إحداثيات أويلر، حيث أن الحد الأول $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ هو تفاضل أويلر لـ α بالنسبة للزمن، والذي يوضح أنه عند أي نقطة في حقل جريان المائع فإن خصائص المائع قابلة للتغير بالنسبة للزمن، أما الحد $u_k \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}$ يصف حقيقة تغير خصائص عنصر من المائع ـ حيث أنها تعتمد فقط على الإحداثيات x و y و z ـ بالنسبة لموقعه الإحداثي، وهذا يعطينا قيم مختلفة لـ α أثناء تدفق المائع، أي أن تغير α بالنسبة للإحداثي x هو المقدار $u\frac{\partial \alpha}{\partial x}$، أما تغير α بالنسبة للإحداثي y هو المقدار $v\frac{\partial \alpha}{\partial y}$، وتغير α بالنسبة للإحداثي z يساوي $w\frac{\partial \alpha}{\partial z}$، وهي قيم مختلفة كما نلاحظ.

إذاً المعادلة (2.2) هي دراسة للتغير في α إذا ما أُخِذت بإحداثيات لاجرانج $\frac{D\alpha}{Dt}$، وقيمة هذا التغير يُعطى بدلالة الحدود $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ و $\frac{\partial \alpha}{\partial x_k}$ التي تشرح تغير α في إحداثيات أويلر، كما تعرف هذه المعادلة بالتفاضل الأساسي.

٤-٢ الحجم المعين (CONTROL VOLUME)

مصطلح الحجم المعين يطلق على حجم يحتوي على كتلة صغيرة من المائع، ندرس من خلاله خصائص المائع المختلفة ومن ثم يمكن تعميم النتائج على جميع عناصر المائع. تختلف أشكال الحجم المعين، ويمكن تصنيفها إلى:

١- حجم معين على شكل متوازي مستطيلات، وتكون أبعاده δx و δy و δz، حيث يمكن التعبير عن أي خاصية من خصائص المائع مثل الضغط والسرعة بمفكوك متسلسلة تايلور (taylor series) حول مركز متوازي الأضلاع الذي يحوي الحجم المعين.

عندما تأخذ الأبعاد δx و δy و δz قيم صغيرة فإننا غالباً ما نكتفي بالحد الأول من مفكوك متسلسلة تايلور حول مركز الحجم المعين. بالإضافة إلى اختصار كتابة الأبعاد لتكون على الصورة dx و dy و dz وهذا ما سنطبقه عند استنتاج قوانين الحفظ.

٢- حجم معين عشوائي الشكل، وتُعطى خصائص المائع في هذه الحالة على صورة تكامل، مثلاً كتلة الحجم المعين في هذه الحالة تُعطى بالقانون $\int_V \rho \ dV$، حيث ρ هي كثافة المائع، والتكامل يحسب كتلة جميع حجم المائع المُحتوى في الحجم المعين.

إن استنتاج مبادئ الحفظ الثلاثة داخل الحجم المعين العشوائي يعطى بالمعادلة التفاضلية التكاملية التالية:

$$\int_V L\alpha \ dV = 0$$

حيث أن L هو معامل تفاضل، و α هي خاصية من خصائص المائع، وبما أن الحجم المعين V عشوائي الشكل، فإن الطريقة الوحيدة لكي تكون المعادلة السابقة صحيحة هي باعتبار أن المقدار $L\alpha$ يساوي صفر، وهكذا نستنتج المعادلات التفاضلية لقوانين الحفظ.

استنتاج قوانين حفظ الكتلة والعزم و الطاقة على الحجم المعين ذو الشكل العشوائي أو على شكل متوازي المستطيلات يعطينا النتيجة نفسها، لذلك في هذا البحث سنتطرق فقط لاستنتاج قوانين الحفظ على حجم معين له شكل عشوائي.

٢-٥ نظرية تحويلة رونالد (REYNOLD'S TRANSPORT THEOREM)

الطريقة التي سنستخدمها لاستنتاج قوانين الحفظ الأساسية تعتمد على مبدأ الاستمرارية و متابعة حجم معين عشوائي الشكل في داخل الإطار المرجعي لإحداثيات لاجرانج. وبما أننا سندمج بين الحجم المعين العشوائي الشكل وإحداثيات لاجرانج، فهذا يعني استخدام التفاضل الأساسي. فالتفاضل الأساسي لأي خاصية من خصائص المائع يساوي بين تغيرها في احداثيات لاجرانج بتغيرها في احداثيات أويلر. لتحويل بعض الحدود إلى ما يكافئها من حدود أخرى تتضمن تكاملات على الحجم، نحتاج إلى نظرية رونالد للتحويل، حيث تمكننا هذه النظرية من تحويل مقدار رياضي في إحداثيات لاجرانج إلى ما يكافئها في إحداثيات أويلر والعكس.

إذا تتبعنا مسار كتلة من المائع خلال جريانه في فترة زمنية δt، واعتبرنا أن α خاصية من خصائص المائع كالطاقة أو العزم أو الكتلة على سبيل المثال، فإن α هي دالة في المتغيرات المستقلة للإطار المرجعي المعتمد على إحداثيات لاجرانج $x_\circ$ و $y_\circ$ و $z_\circ$ و الزمن t، وبما أن $x_\circ$ و $y_\circ$ و $z_\circ$ هي الإحداثيات الإبتدائية لهذه الكتلة المُتتبعه و المُحتواه داخل حجم معين، فإن قيمة α تكون دالة في المتغير t فقط، أي أن $\alpha = \alpha(t)$، ويُعطى تغير α داخل الحجم المعين بالنسبة للزمن t حسب تعريف التفاضل بالمعادلة التالية:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Dt}}\int_{\mathrm{V(t)}}\alpha(\mathrm{t})\mathrm{dV} = \lim_{\delta\mathrm{t}\to 0}\left\{\frac{1}{\delta\mathrm{t}}\left[\int_{\mathrm{V(t+\delta t)}}\alpha(\mathrm{t}+\delta\mathrm{t})\mathrm{dV} - \int_{\mathrm{V(t)}}\alpha(\mathrm{t})\mathrm{dV}\right]\right\}$$

حيث أن $V(t)$ هو الحجم الذي يحتوي على كتلة المائع المُتتبعة، ويمكن أن يتغير شكله وأبعاده أثناء تدفق المائع.

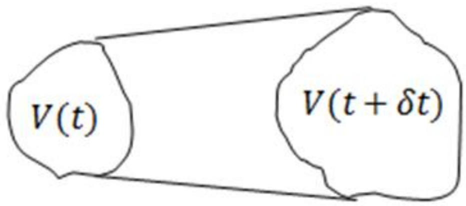
بإضافة وطرح المقدار $\int_{V(t)} \alpha(t+\delta t)$ في المعادلة السابقة نحصل على :

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)}\alpha(t)\,dV = \lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\int_{V(t+\delta t)}\alpha(t+\delta t)dV - \int_{V(t)}\alpha(t+\delta t)dV\right] + \frac{1}{\delta t}\left[\int_{V(t)}\alpha(t+\delta t)dV - \int_{V(t)}\alpha(t)dV\right]\right\}$$

نلاحظ أن المقدار $\lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\int_{V(t)}\alpha(t+\delta t)dV - \int_{V(t)}\alpha(t)dV\right]\right\}$، هو تعريف التغير في α بالنسبة للزمن t، ويساوي $\int_{\mathrm{V(t)}}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathrm{t}}\mathrm{dV}$، وبذلك يصبح الشكل النهائي للتغير على الصورة التالية:

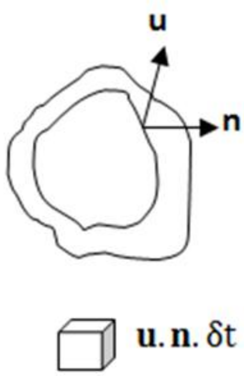
$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)}\alpha(t)dV = \lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\int_{V(t+\delta t)-V(t)}\alpha(t+\delta t)dV\right]\right\} + \int_{V(t)}\frac{\partial\alpha}{\partial t}dV$$

أما الحد $\lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\int_{V(t+\delta t)-V(t)}\alpha(t+\delta t)dV\right]\right\}$ يشير إلى التغير في الحجم V بينما α تظل ثابتة.



شكل (٢-٥) شكل عشوائي للحجم المعين عند الزمن t والزمن $(t+\delta t)$. [٢]

الشكل (٢-٥) يوضح تتبُع الحجم المعين $V(t)$ الذي يحتوي على كتلة من المائع أثناء جريانه في الزمن t والزمن $(t+\delta t)$، حيث نلاحظ التغير الذي يطرأ على الحجم و الشكل. نرمز للسطح الذي يحتوي على الحجم المعين $V(t)$ بالرمز $S(t)$، وسرعة أي نقطة من نقاط السطح هي $\boldsymbol{u}$، ومتجه الوحدة العامودي هو $\boldsymbol{n}$.



شكل (٢-٦) الفرق بين الحجم المعين عند الزمن $(t+\delta t)$ وعند الزمن t. [٢]

الشكل (٢-٦) يوضح تداخل الحجم المعين $V(t)$ في الحجم المعين $V(t+\delta t)$، وهنا نشاهد الاختلاف بين الحجمين. نجد أن مقدار حجم الاختلاف هو عبار عن حاصل ضرب مساحة سطح الحجم في المسافة التي قطعها الحجم.

المسافة العامودية من أي نقطة في السطح الداخلي للحجم $V(t)$ إلى أي نقطة في السطح الخارجي للحجم $V(t+\delta t)$ تساوي حاصل ضرب السرعة في متجه الوحدة العامودي في الفرق بين الزمن t والزمن $(t+\delta t)$، أي أن المسافة العامودية تساوي $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}.\delta t$. وبذلك فإن أي عنصر من عناصر السطح δS يقابل تغير في الحجم δV بحيث يكون التغير في الحجم δV يساوي $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}.\delta t.\delta S$، وهذا يساعدنا في تحويل الحد السابق ليكون على الصورة الرياضية التالية:

$$\lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\int_{V(t+\delta t)-V(t)}\alpha(t+\delta t)dV\right]\right\}=\lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\int_{S(t)}\alpha(t+\delta t)\,\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}\delta t dS\right]\right\}$$

إذاً التغير في α بالنسبة للزمن يساوي:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)}\alpha(t)=\lim_{\delta t\to 0}\left\{\left[\int_{S(t)}\alpha(\mathrm{t}+\delta\mathrm{t}).\mathbf{u}.\mathbf{n}\mathrm{dS}\right]\right\}+\int_{\mathrm{V(t)}}\frac{\partial\alpha}{\partial\mathrm{t}}\mathrm{dv}$$

$$=\int_{S(t)}\alpha(t).\mathbf{u}.\mathbf{n}\mathrm{dS}+\int_{V(t)}\frac{\partial\alpha}{\partial t}dV$$

نجد الآن أن التغير للدالة α في الحجم المعين بالنسبة للزمن -إحداثيات لاجرانج- يساوي حاصل جمع تكامل على السطح وتكامل على الحجم بدلالة إحداثيات أويلر، وكما سبق وضحنا أهمية استنتاج جميع مبادئ الحفظ في صورة تكامل على الحجم لأي مقدار $L\alpha$، لذلك نحول التكامل على السطح إلى تكامل على الحجم باستخدام نظرية غاوس (Gauss' theorem) نجد أن:

$$\int_{S(t)}\alpha(t).\mathbf{u}.\mathbf{n}\mathrm{dS}=\int_{\mathrm{V(t)}}\boldsymbol{\nabla}.(\alpha\mathbf{u})\,\mathrm{dV}$$

وبالتعويض عن هذه القيمة في المعادلة السابقة، نحصل على تحويلة رونالد في شكلها العام :

$$\frac{D}{Dt}\int_{V}\alpha\,dV=\int_{\mathrm{V(t)}}\nabla.(\alpha\mathbf{u})\,\mathrm{dV}+\int_{V(t)}\frac{\partial\alpha}{\partial t}dV=\int_{V}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\nabla.(\alpha\mathbf{u})\right]dV$$

وكما هو مُلاحظ فقد استطعنا تحويل التكامل على الحجم المعين بدلالة إحداثيات لاجرانج، إلى تكامل على حجم معين بدلالة إحداثيات أويلر.

٢-٦ مبدأ حفظ الكتلة (CONSERVATION OF MASS)

يتصف المائع بأنه يأخذ شكل الوعاء الذي يحتويه، فلو تتبعنا مسار حجم معين من المائع أثناء جريانه، نلاحظ أن سرعة الحجم المعين تزداد في المساحات الضيقة، وتصبح بطيئة في المساحات الواسعة، أيضاً كثافة المائع في المساحات الضيقة تكون أكبر من كثافة المائع في المساحات الواسعة، كما هو موضح في الشكل(٢-٧).

شكل(٢-٧)

A_1 مساحة المقطع الاول

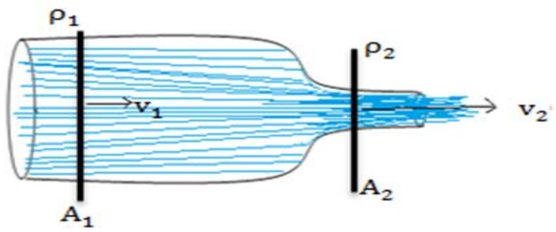
A_2 مساحة المقطع الثاني

v_1 سرعة المائع عند المقطع الاول

v_2 سرعة المائع عند المقطع الثاني

ρ_1 كثافة المائع عند المقطع الاول

ρ_2 كثافة المائع عند المقطع الثاني



إذا تتبعنا مسار حجم معين V ذو شكل عشوائي وكتلة ثابتة، فإننا نلاحظ تغيراً حاصلاً في أبعاد وشكل الحجم V أثناء جريان المائع، بينما تبقى الكتلة ثابتة لا تتغير، وهذا ما نقصده بمبدأ حفظ الكتلة.

يمكن كتابة المعادلة الرياضية التي تصف مبدأ حفظ الكتلة، باستخدام الإطار المرجعي المعتمد على إحداثيات لاجرانج كالتالي:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\, dV = 0$$

حيث أن ρ تساوي كثافة المائع.

نحول المعادلة السابقة إلى تكامل حجمي يحتوي على مشتقات أويلر باستخدام نظرية تحويلة رونالد، باعتبار أن α تمثل كثافة المائع ρ في هذه الحالة:

$$\int_{\mathrm{V}}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k)\right]\mathrm{dV}=0$$

بما أن الحجم المعين عشوائي الشكل، فإن المعادلة السابقة متحققة فقط إذا كان ما بداخل التكامل يساوي الصفر، أي أن:

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k)\right]=0 \qquad (2.3a)$$

المعادلة (2.3a) تمثل معادلة حفظ الكتلة، وهي معادلة تفاضلية تتضمن استمرار سرعة تدفق المائع، لذا عادة ما تُسمى بمعادلة الاتصال (*Continuity Equation*).

إذا كان المائع غير قابل للانضغاط فإن كتلته تبقى ثابتة، وكذلك حجمه، بالتالي فإن كثافة المائع تبقى ثابتة، أي أن التغير في كثافة المائع يساوي صفر:

$$\frac{D\rho}{Dt}=0$$

يمكن تبسيط معادلة الاتصال (2.3a) بالصورة:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_k\frac{\partial\rho}{\partial x_k}+\frac{\rho\partial u_k}{\partial x_k}=0$$

الحدان الأول والثاني يمثلان التغير في الكثافة بالنسبة لإحداثيات أويلر، ويمكن تحويلهما إلى التغير في الكثافة بالنسبة للإطار المرجعي المعتمد على إحداثيات لاجرانج:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0 \qquad (2.3b)$$

احتوت معادلة الاتصال السابقة على احداثيات لاجرانج واحداثيات أويلر معاً، حيث يمثل الحد الأول إحداثيات لاجرانج، ويمثل الحد الثاني احداثيات أويلر.

في حالة الموائع غير قابلة للانضغاط تكون كثافة المائع ثابتة، أي أن التغير في كثافة المائع يساوي صفر، بالتعويض في معادلة (2.3b) تصبح المعادلة على الصورة:

$$\rho\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0$$

وبما أن الكثافة عموما لا تساوي الصفر $\rho \neq 0$، فإن:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0 \qquad (2.3c)$$

وهذه هي معادلة الاتصال للموائع غير قابلة للانضغاط.

٢-٧ مبدأ حفظ العزم (CONSERVATION OF MOMENTUM)

يعرف عزم جسيم ما كتلته m وسرعته u بأنه حاصل ضرب السرعة في الكتلة:

$$momentum = m.u$$

اتجاه العزم يكون في نفس اتجاه السرعة المُسببة له، ومن قانون نيوتن الثاني الذي ينص على أن القوة تساوي حاصل ضرب كتلة الجسم m في تسارعه a:

$$F = m.a$$

والتسارع هو معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن $a = \frac{du}{dt}$، بالتعويض عن قيمة التسارع في قانون نيوتن الثاني، نحصل على:

$$F = m.\frac{du}{dt}$$

$$F = \frac{d(m.u)}{dt}$$

$$F = \frac{dp}{dt} \qquad (p = momentum)$$

إذاً معدل التغير في العزم بالنسبة للزمن يساوي مجموع القوى الخارجية المؤثرة على كتلة المائع.

عند النظر في كتلة معينة من المائع في الاطار المرجعي المعتمد على إحداثيات لاجرانج، نجد أن القوى الخارجية المؤثرة على الكتلة المعينة من المائع يمكن تصنيفها إلى:

١ – قوة مؤثرة على الجسم، كقوة الجاذبية الأرضية و القوة الكهرومغناطيسية.

٢ – قوة مؤثرة على السطح، مثل الضغط و اللزوجة.

لتكن $\boldsymbol{f}$ قوة مؤثرة على وحدة كتلة، إذاً محصلة القوى الخارجية المؤثرة على كتلة حجمها V هي $\int_V \rho.\boldsymbol{f}\, dV$، ولتكن $\boldsymbol{P}$ قوة مؤثرة على وحدة واحدة من مساحة السطح، فإن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على السطح S الذي يحتوي على حجم V هي $\int_S \boldsymbol{P}\, dS$. بما أن الكتلة تساوي حاصل ضرب

الكثافة ρ في الحجم V، فإن كتلة وحدة حجم تساوي الكثافة ρ. وبالتالي فإن عزم كتلة وحدة حجم هو $\rho\boldsymbol{u}$. إذا عزم كتلة حجم مقداره V هو $\int_V \rho.\boldsymbol{u}\, dV$.

من قانون نيوتن الثاني فإن معدل التغير في العزم يساوي مجموع القوى المؤثرة على الجسم والقوى المؤثرة على السطح فإن:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho.\boldsymbol{u}\, dV = \int_S \boldsymbol{p}\, dS + \int_V \rho.\boldsymbol{f}\, dV$$

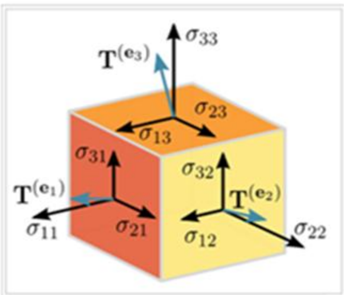
باستخدام نظرية رونالد لتحويل الطرف الأيسر من المعادلة السابقة من احداثيات لاجرانج الى إحداثيات أويلر باعتبار أن α تمثل العزم في وحدة حجم ρu_j، نجد أن:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho.\boldsymbol{u}\, dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k)\right] dV$$

بالتالي:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k)\right] dV = \int_S \boldsymbol{p}\, dS + \int_V \rho.\boldsymbol{f}\, dV$$

إذا أثرت قوة خارجية على سطح جزيء من المائع، تنقسم هذه القوة إلى تسع مركبات، ثلاث مركبات عمودية وستة مركبات مماسيه تجتمع لتكون ما يسمى بمصفوفة الإجهاد (Stress Tensor) عناصرها مرتبطة باتجاهات القوة المؤثرة. ونرمز لمصفوفة الإجهاد σ_{ij}، حيث أن i ترمز إلى اتجاه القوة، و j يرمز إلى المستوى الذي تؤثر عليه هذه القوة، و$(i,j = 1,2,3)$، والشكل (٢-٨) يوضح ذلك.



شكل(٢-٨) يوضح اهمية مركبات مصفوفة الإجهاد وتأثيرها على جزيء من المائع في الفراغ ثلاثي الابعاد.

نلاحظ أن مصفوفة الإجهاد متماثلة، وهذا يوضح أن من بين المركبات التسعة للقوة يوجد ستة مركبات مستقلة، وهذا يمكننا من التعبير عن محصلة القوى المؤثرة على سطح المائع بالشكل التالي (أنظر فصل (١-٤)):

$$\int_S \boldsymbol{p}\, dS = \int_S \sigma_{ij}\, n_i\, dS$$

أو

$$\int_S p_j\ \ dS = \int_S \sigma_{ij}\, n_i\, dS$$

و بالتعويض عن هذا الحد في المعادلة السابقة لتغير العزم، نجد أن:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k)\right] dV = \int_S \sigma_{ij}\, n_i\, dS + \int_V \rho . \boldsymbol{f}\, dV \qquad (*)$$

باستخدام نظرية غاوس لتحويل الحد الأول في الطرف الأيمن في معادلة (*) من تكامل سطحي إلى تكامل حجمي، نجد أن:

$$\int_S \sigma_{ij}\, n_i\, dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}\, dV$$

تصبح المعادلة (*)على الصورة:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k)\right] dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}\, dV + \int_V \rho . f_j\, dV$$

بما أن جميع حدود التكامل الموجودة في طرفي المعادلة السابقة هي تكاملات حجمية لمتغيرات بدلالة إحداثيات أويلر، فإن هذا يمكننا من كتابتها في صورة تكامل حجمي واحد، على الصورة $\int_V \{\} dV = 0$.

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k)\right] dV - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}\, dV - \int_V \rho . f_j\, dV = 0$$

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \rho . f_j \right\} dV = 0$$

بما أن الحجم المعين له شكل عشوائي، فإن المعادلة السابقة متحققة إذا كان المقدار الموجود داخل التكامل يساوي صفر:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \rho . f_j = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho . f_j \qquad (**)$$

نحسب التفاضلات في المعادلة السابقة:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j$$

الحدان الثاني والثالث يمثلان حاصل ضرب معادلة حفظ الكتلة في مركبة السرعة u_j، ومن معادلة حفظ الكتلة فإن $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$، إذاً:

$$u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = 0$$

بالتعويض عن قيمة الحدين الثاني والثالث في معادلة (**) نحصل على معادلة حفظ العزم:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j \qquad (2.4)$$

الطرف الأيسر من المعادلة (2.4) يمثل معدل التغير في العزم، و الحد الأول منه يمثل التسارع في فترة زمنية محددة، بينما الحد الثاني يمثل التسارع النقلي ويعبر عنه ايضاً بالتسارع المحلي لأنه دائماً موجود حتى وإن كان تدفق المائع ثابتاً. أما الطرف الأيمن من المعادلة (2.4) فإنه يمثل القوة المسببة للتسارع، الحد الأول منه يمثل قوة الإجهاد على السطح، بينما الحد الثاني يمثل القوة المؤثرة على الجسم.

٢-٨ مبدأ حفظ الطاقة (CONSERVATION OF ENERGY)

مبدأ حفظ الطاقة هو تطبيق للقانون الأول للديناميكا الحرارية على عنصر من المائع أثناء جريان المائع، والقانون الأول للديناميكا الحرارية يطبق على نظام ديناميكي حراري، بحيث يكون هذا النظام مبدئياً في حالة سكون، ثم يتغير وضع السكون بسبب تغيرات تنشأ من تأثير الوسط المحيط بهذا النظام، وأخيراً يعود الى وضع السكون مرة أخرى.

ينص القانون الأول للديناميكا الحرارية على أن التغير الحاصل في الطاقة الداخلية بسبب تأثير الوسط المحيط بالنظام الديناميكي تحت الشروط المذكورة سابقاً، يساوي حاصل جمع الشغل الكلي المبذول على النظام أو من النظام، والحرارة التي اكتسبها النظام بسبب الشغل المبذول عليه، أو فقدها نتيجة بذله للشغل.

لو اعتبرنا أن النظام الديناميكي الحراري هو عبارة عن حجم معين من المائع يعتمد على الإطار المرجعي لإحداثيات لاجرانج، فإن هذا النظام بشكل عام لا يكون إطلاقاً عند وضع السكون، وبذلك لا يكون في حالة اتزان، من ناحية أخرى فإن تدفق المائع في الديناميكا الحرارية نادراً ما يكون بعيداً عن حالة الاتزان، وهذه الصعوبة الظاهرة يمكن التغلب عليها بحساب طاقة المائع اللحظية والتي تتألف من جزأين:

١- الطاقة الذاتية أو الداخلية.

٢- الطاقة الحركية.

عند تطبيق القانون الأول للديناميكا الحرارية، نُعرف الطاقة على أنها حاصل جمع الطاقة الداخلية لوحدة كتلة e والطاقة الحركية لوحدة كتلة $\frac{1}{2}\mathbf{u}.\mathbf{u}$، وهذا يُمَكِننا من إعادة صياغة القانون الأول للديناميكا الحرارية والمُطبق على عنصر من المائع كالتالي: معدل التغير في الطاقة الكلية - داخلية وحركية - للمائع أثناء تدفقه يساوي حاصل جمع معدل الشغل المبذول على المائع بسبب القوة الخارجية، ومعدل الحرارة المُكتسبة بسبب التوصيل.

يمكننا تطبيق هذا القانون الأساسي بأخذ أي كتلة عشوائية من المائع حجمها V تعتمد إحداثياتها على الإطار المرجعي لإحداثيات لاجرانج، بحيث تكون الطاقة الكلية لهذه الكتلة في وحدة حجم تساوي $\rho e + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}.\mathbf{u}$، إذاً الطاقة الكلية المحتواه في الحجم المعين V تساوي:

$$\int_V \rho e + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}.\mathbf{u} \quad dV$$

تنقسم القوى الخارجية المؤثرة على كتلة المائع إلى قوى خارجية تؤثر على الحجم، وقوة خارجية تؤثر على السطح، كما سبق شرحها في الفصل (٢-٧)، والشغل المبذول على المائع بواسطة القوى السابقة هو حاصل ضرب السرعة $\boldsymbol{u}$ في مركبات القوة التي تكون على استقامة واحدة مع السرعة، أي أن الشغل المبذول هو حاصل الضرب القياسي (scalar product) لمتجه السرعة في متجه القوة.

من أنواع القوى المؤثرة على المائع، قوة الضغط السطحي، وتُمثل قيمته لكل وحدة مساحة بالمتجه $\mathbf{P}$، وبذلك فإن الشغل الكلي المبذول بسبب قوة الضغط يساوي:

$$\int_S \mathbf{u}.\mathbf{P} \quad dS$$

حيث S هي مساحة السطح المحيط بالحجم المعين V.

النوع الآخر من القوى المؤثرة على المائع هي القوى المؤثرة على الجسم، ومقدارها لكل وحدة كتلة هي $\mathbf{f}$، إذاً محصلة الشغل المبذول بسبب القوة المؤثرة على الجسم يساوي: $\int_V \rho\mathbf{f}.\mathbf{u} \quad dV$.

للتعبير عن الحرارة المضافة للمائع، نفرض أن المتجه $\mathbf{q}$ يرمز لمعدل تدفق الحرارة التي تترك الحجم المعين عبر سطحه عن طريق التوصيل، إذاً كمية الحرارة التي تترك كتلة المائع في وحدة زمن وفي وحدة مساحة من السطح تساوي $\mathbf{q}.\boldsymbol{n}$، حيث $\boldsymbol{n}$ هو متجه الوحدة العامودي على السطح، بالتالي فإن كمية الحرارة التي تترك المائع عبر السطح خلال وحدة زمن تساوي:

$$\int_S \mathbf{q}.\boldsymbol{n}\, dS$$

يمكن التعبير عن القانون الأول للديناميكا الحرارية رياضياً، بالشكل التالي:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \left(\rho e+\frac{1}{2}\rho \mathbf{u}.\mathbf{u}\right)\, dV=\int_S \mathbf{u}.\mathbf{P}\;\, dS+\;\int_V \rho \mathbf{f}.\mathbf{u}\;\, dV-\int_S \mathbf{q}.\boldsymbol{n}\, dS$$

يمكن تحويل المعادلة السابقة إلى معادلة بدلالة إحداثيات أويلر فقط، باستخدام نظرية رونالد للتحويل باعتبار α تمثل الطاقة الكلية في وحدة حجم، فتصبح المعادلة السابقة على الصورة التالية:

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\rho e+\tfrac{1}{2}\rho \mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho e+\tfrac{1}{2}\rho \mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}\right)u_k\right]\right\} dV=\int_S \mathbf{u}.\mathbf{P}\;\, dS+ \int_V \rho \mathbf{f}.\mathbf{u}\;\, dV-\int_S \mathbf{q}.\boldsymbol{n}\, dS \qquad (*)$$

بما أن متجه قوة الضغط السطحي $\mathbf{P}$ يرتبط بمصفوفة الإجهاد σ_{ij} بالمعادلة $P_j=\sigma_{ij}n_i$ كما هو موضح في الفصل السابق، إذاً يمكن التعبير عن الحد الأول في الطرف الأيمن كالتالي:

$$\int_S \mathbf{u}\,.\,\mathbf{P}\, dS=\;\int_S u_j\,\sigma_{ij}n_i\, dS$$

بتحويل التكامل السابق إلى تكامل على الحجم باستخدام نظرية غاوس ليصبح الشغل المبذول على السطح يساوي:

$$\int_S \mathbf{u}\,.\,\mathbf{P}\, dS=\int_S u_j\,\sigma_{ij}n_i\, dS=\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}\,(u_j\sigma_{ij})dV$$

وبتطبيق نظرية غاوس مباشرة على الحد الثالث من الطرف الأيمن في المعادلة (*) نحصل على:

$$\int_S \mathbf{q}\,.\,\mathbf{n}\, dS=\;\int_S q_j\;n_i\, dS=\int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j}dV$$

بما أن معادلة الطاقة احتوت على مصفوفة الإجهاد، إذاً يمكن التعبير عن معادلة حفظ الطاقة باستخدام صيغ المصفوفات، كالتالي:

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e+\tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho e+\tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)u_k\right]\right\} dV=\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\,\sigma_{ij}\right)dV+ \int_V u_j\rho f_j dV-\;\int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j}dV$$

وبصورة أخرى:

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)u_k\right]\right\} dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\,\sigma_{ij}\right) dV - \int_V u_j \rho f_j dV + \int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV = 0$$

نجمع الحدود في تكامل واحد:

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)u_k\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\,\sigma_{ij}\right) - u_j\rho f_j + \frac{\partial q_j}{\partial x_j}\right\} dV = 0$$

وهذا يؤدي إلى:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)u_k\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\,\sigma_{ij}\right) - u_j\rho f_j + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = 0$$

من المعادلة التفاضلية السابقة نتوصل إلى:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)u_k\right] = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\,\sigma_{ij}\right) + u_j\rho f_j - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \qquad (**)$$

نفاضل الحد الأول من الطرف الأيسر في معادلة (**)، باعتبار أن الدالة ρe هي حاصل ضرب دالتين ρ و e، نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right) = \rho\frac{\partial e}{\partial t} + e\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}u_j u_j\right) + \tfrac{1}{2}u_j u_j\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

نفاضل الحد الثاني من الطرف الأيسر في معادلة (**)، باعتبار أن الدالة $\frac{1}{2}\rho u_j u_j$ هي حاصل ضرب دالتين ρ و $\frac{1}{2}u_j u_j$، نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)u_k\right] = e\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) + \rho u_k\frac{\partial e}{\partial x_k} + \tfrac{1}{2}u_j u_j\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) + \rho u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\tfrac{1}{2}u_j u_j\right) \qquad (***)$$

من معادلة الاتصال نجد أن: $\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ وبالتعويض في معادلة (***) نجد أن:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho e + \tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)u_k\right] = -e\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_k\frac{\partial e}{\partial x_k} - \tfrac{1}{2}u_j u_j\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\tfrac{1}{2}u_j u_j\right)$$

يمكن التعبير عن الطرف الأيسر في المعادلة (**) كالتالي:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e+\tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho e+\tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)u_k\right]=\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial e}{\partial x_k}+\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}u_j u_j\right)+\rho u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\tfrac{1}{2}u_j u_j\right)$$

نحسب تفاضل الحدين الثالث والرابع من المعادلة السابقة، باعتبار أن الدالة $\frac{1}{2}u_j u_j$ هي حاصل ضرب دالتين $\frac{1}{2}u_j$ و u_j، وكذلك بالنسبة للحد الرابع، نجد أن:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e+\tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\rho e+\tfrac{1}{2}\rho u_j u_j\right)u_k\right]=\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial e}{\partial x_k}+\rho u_j\frac{\partial u_j}{\partial t}+\rho u_j u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

بعد ذلك نفاضل الحد الأول من الطرف الأيمن للمعادلة (**) نجد أن:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\,\sigma_{ij}\right)=u_j\,\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

الآن نعوض بقيمة الحدود السابقة في المعادلة (**):

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial e}{\partial x_k}+\rho u_j\frac{\partial u_j}{\partial t}+\rho u_j u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=u_j\,\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\,u_j\rho f_i-\frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

يمكن تبسيط المعادلة السابقة بإلغاء الحد الثالث والحد الرابع من الطرف الأيسر مع الحد الأول والحد الثالث من الطرف الأيمن، حيث أن هذه الحدود تمثل معادلة حفظ العزم مضروبة في سرعة تدفق الحجم المعين u_j، وبذلك نتوصل إلى الصورة النهائية لمعادلة حفظ الطاقة الحرارية:

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial e}{\partial x_k}=\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} \qquad (2.5)$$

الحدود المُلغاة في التبسيط الأخير تمثل حدود الطاقة الميكانيكية، وهي:

$$u_j\rho\frac{\partial u_j}{\partial t}+u_j\rho u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=u_j\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+u_j\rho f_j$$

إذن حاصل الضرب القياسي لكل قوة مع متجه السرعة، أو الضرب في u_j، يعطي طاقة ميكانيكية، وتساوي معدل الشغل المبذول بالقوى الميكانيكية.

من ناحية اخرى المعادلة (2.5) هي توازن الطاقة الحرارية وهي ما تبقى عندما تم طرح الطاقة الميكانيكية من توازن الطاقة الكلية، وهي عادة ما يشار إليها بمعادلة الطاقة.

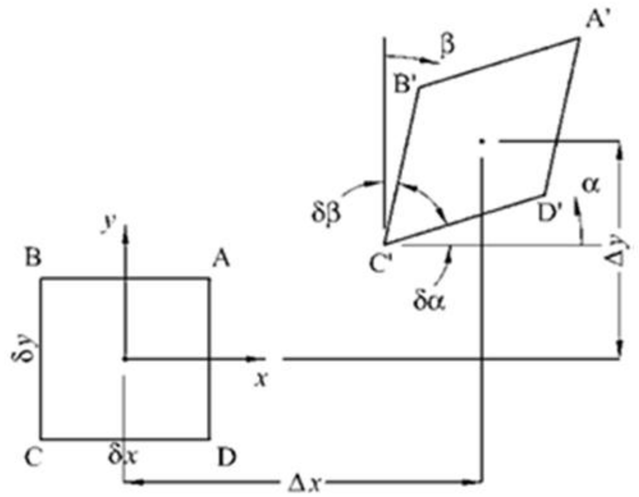
فيزيائياً فإن الطرف الأيسر من المعادلة (2.5) يمثل معدل التغير في الطاقة الداخلية، حيث يمثل الحد الأول معدل التغير في الطاقة الداخلية بالنسبة للزمن، أما الحد الثاني يمثل التغير النقلي في الطاقة الداخلية نتيجة تدفق المائع، أما الطرف الأيمن يمثل سبب التغير في معدل الطاقة الداخلية، الحد الاول من الطرف الأيمن يمثل تحول الطاقة الميكانيكية إلى طاقة حرارية بسبب الشغل الناتج عن القوى السطحية، أما الحد الثاني يمثل معدل الحرارة المضافة عن طريق التوصيل (conduction) من الخارج.

٢-٩ الدوران ومعدل تأثير القوى المماسية (ROTATION AND RATE OF SHEAR)

الهدف من دراسة هذا الفصل هو حساب الدوران لعنصر من المائع حول محوره، وتأثير القوى المماسية عليه، وتعريف المصفوفة التي تمثل هذه الكميات الفيزيائية.

لمعرفة ذلك نأخذ حجم معين متناهي في الصغر على شكل مكعب، ثم نأخذ مقطع عرضي منه فيصبح على شكل مربع نرمز لزاوياه بالرموز A و B و C و D، وندرس التغير في شكله واتجاهه اثناء تدفقه.

الشكل (٢-٩) يمثل عنصر من المائع في البُعد الثنائي (بمعنى آخر اسقاط لحجم معين ثلاثي الأبعاد على بعدين)، بحيث تكون أبعاده عند الزمن $t = 0$ هي δx وδy .



شكل(٢-٩) يوضح حجم معين متناهي في الصغر من المائع عند الزمن $t = 0$، نرمز له بالرمز $(ABCD)$، وعند الزمن $t = \delta t$ تغير موقعه بسبب جريان المائع، ونرمز له بالرمز $(A'B'C'D')$.[٢]

عند الزمن $t=0$ يكون الحجم المعين على شكل مربع، ونقطة المنتصف لهذا المربع تكون منطبقة على نقطة الأصل (0,0) للمحاور الإحداثية في المستوىxy ، ولكن أثناء جريان المائع وبعد مرور فترة قصيرة من الزمن $t = \delta t$، فإن نقطة المنتصف يتغير موقعها كما هو موضح في الشكل (٢-٩).

المسافة Δx التي يقطعها المركز في اتجاه محور x تُعطى بالعلاقة التالية:

$$\Delta x = \int_0^{\delta t} u[x(t), y(t)]\, dt$$

وتساوي تكامل السرعة $u[x(t), y(t)]$ بالنسبة للزمن t في الفترة الزمنية $[0, \delta t]$، لأن المسافة تساوي تكامل السرعة بالنسبة للزمن.

بسبب الفترة الزمنية القصيرة δt التي تحركتها نقطة المنتصف فإن قيم x و y تكون قريبة من الصفر، بالتالي نستطيع كتابة السرعة $u[x(t), y(t)]$ باستخدام مفكوك تايلور حول النقطة (0,0)، إذاً Δx تساوي:

$$\Delta x = \int_0^{\delta t} \left[u(0,0) + x(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + y(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \cdots\right] dt$$

حيث تمثل النقاط في المعادلة السابقة الحدود التي تكون أصغر من التي قبلها والتي سوف تتلاشى عند حساب نهاية δt، حيث $\delta t \to 0$.

نكامل المعادلة السابقة لنحصل على:

$$\Delta x = u(0,0)\delta t + \int_0^{\delta t} \left[x(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + y(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \cdots\right] dt$$

$$\Delta x = u(0,0)\delta t + \cdots$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب المسافة بين الموقع السابق والموقع الحالي لنقطة المنتصف في اتجاه محور y:

$$\Delta y = v(0,0)\delta t + \cdots$$

عندما يتحرك الحجم المعين يحدث له دوران ويتغير شكله، كما هو مُلاحظ في المربع الذي حُدِدت زواياه بالرموز A' و B' و C' و D' (شكل (٢-٦))، عند الزمن $t = \delta t$.

نلاحظ الدوران الحاصل في الضلع CD، حيث دار بزاوية مقدارها $\delta\alpha$ ليصبح في موقعه الجديد $C'D'$، و α موجبة إذا كانت في اتجاه عكس عقارب الساعة، و دار الضلع BC بزاوية مقدارها $\delta\beta$، ليصبح في موقعه الجديد $B'C'$، و β موجبة إذا كانت في اتجاه عقارب الساعة.

نستطيع إيجاد الزاوية $\delta\alpha$ بدلالة ظل الزاوية والذي يساوي الفرق بين إحداثيات y للمستقيم $D'C'$ على الفرق بين إحداثيات x للمستقيم $D'C'$ كالتالي:

$$tan\ \delta\alpha = \left(\frac{y\ component\ of\ D'C'}{x\ component\ of\ D'C'}\right)$$

$$\delta\alpha = tan^{-1}\left(\frac{y\ component\ of\ D'C'}{x\ component\ of\ D'C'}\right)$$

$$\delta\alpha = tan^{-1}\left\{\frac{\left[v\left(\frac{1}{2}\delta x,-\frac{1}{2}\delta y\right)\delta t+\cdots\right]-\left[v(-\frac{1}{2}\delta x,-\frac{1}{2}\delta y+\cdots\right]}{\delta x+\cdots}\right\}$$

حيث v مركبة السرعة العامودية، محسوبة أولاً عند النقطة D الواقعة في الربع الرابع الذي تكون فيه النقاط موجبة الإحداثي الأول وسالبة الإحداثي الثاني، إذاً إحداثيات النقطة D تساوي $(\frac{1}{2}\delta x,-\frac{1}{2}\delta y)$، وثانياً عند النقطة C الواقعة في الربع الثالث الذي تكون فيه النقطة سالبة الإحداثي الأول والثاني، ونستطيع تمثيل النقطة C بالزوج المرتب $(-\frac{1}{2}\delta x,-\frac{1}{2}\delta y)$.

الإحداثي x للضلع $D'C'$ قد يختلف قليلاً عن δx، ولكن يمكن تجاهل حساب هذا المقدار ونكتفي بالتعبير عن المقدار ب $(\delta x+\cdots)$.

نعبر عن الزاوية $\delta\alpha$ باستخدام مفكوك تايلور حول نقطة الأصل $(0,0)$ لدالة مركبة السرعة العمودية v

كالتالي:

$$\delta\alpha = \tan^{-1}\left\{\frac{\left[v(0,0)+\frac{1}{2}\delta x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0,0)-\frac{1}{2}\delta y\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(0,0)+\cdots\right]\delta t}{\delta x(1+\cdots)} - \frac{\left[v(0,0)-\frac{1}{2}\delta x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0,0)-\frac{1}{2}\delta y\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(0,0)+\cdots\right]\delta t}{\delta x(1+\cdots)}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\left[\delta x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0,0)+\cdots\right]\delta t}{\delta x(1+\cdots)}\right\}$$

$$\delta\alpha = \tan^{-1}\left\{\frac{\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0,0)+\cdots\right]\delta t}{(1+\cdots)}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0,0)+\cdots\right]\delta t$$

باستخدام مفكوك دالة معكوس الظل($\tan^{-1}$):

$$\delta\alpha = \left[\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)+\cdots\right]\delta t + \cdots$$

بالقسمة على δt :

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0)+\cdots$$

المعادلة السابقة توضح معدل التغير في الزاوية α خلال وحدة زمن، وبما أن قيم δt و δy و δx جميعها تقترب من الصفر فإن التعبير عن المعادلة السابقة يكون على الصورة:

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$

حيث $\dot{\alpha}$ هي مشتقة الزاوية α بالنسبة للزمن، ويمكن استنتاج قيمة الزاوية $\delta\beta$ بنفس الطريقة، و $\dot{\beta}$ تمثل مشتقة الزاوية β بالنسبة للزمن:

$$\dot{\beta} = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0)$$

نستطيع حساب معدل الدوران في اتجاه عقارب الساعة بقياس كل من الزاويتين α و β في اتجاه عقارب الساعة، كما تجدر الإشارة إلى أن قيمة الزاوية α تكون سالبة، لأن α تكون فقط موجبة إذا قيست مع نفس اتجاه عقارب الساعة، بينما قيمة الزاوية β تكون موجبة لأنها في اتجاه عقارب الساعة، وبذلك نحصل على معادلة معدل الدوران:

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\beta}-\dot{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{dv}{dx}\right) \qquad (2.6a)$$

أيضاً نستطيع حساب معدل تأثير القوى المماسية ، وذلك عندما يقترب الضلعان $B'C'$ و $D'C'$ من بعضهما، ويعطى معدل تأثير هذه القوى المماسية بالمعادلة:

$$\frac{1}{2}(\dot{\beta}+\dot{\alpha})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{dv}{dx}\right) \qquad (2.6b)$$

أُجري التحليل السابق في بُعدين والذي يُعتبر كمسقط لعنصر ثلاثي الأبعاد في المستوى xy، أما إذا تم إجراء التحليل السابق في مستويات أخرى، فإنه يمكن التحقق من أن معدل الدوران للعنصر حول محاوره ومعدل تأثير القوى المماسية معطى كالتالي:

$$Rate\ of\ rotation=\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{du_j}{dx_i}\right)$$

$$Rate\ of\ shearing=\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{du_j}{dx_i}\right)$$

هذا يعني أن كل من معدل الدوران ومعدل تأثير القوى المماسية نستطيع أن نمثلها بمصفوفة من الرتبة الثانية ـ مصفوفة من تسع مركبات ـ لأن ($i=1,2,3$) و ($j=1,2,3$).

نلاحظ وجود ثلاث مركبات مستقلة تمثل مصفوفة معدل الدوران، لأنها مصفوفة غير متماثلة، بينما مصفوفة معدل تأثير القوى المماسية مصفوفة متماثلة، وتمثل بست مركبات مستقلة.

الجزءان غير المتماثل والمتماثل يشكلان معاً مصفوفة تسمى مصفوفة معدل التشكل (*deformation-rate tensor* e_{ij}) وهي معرفة كالتالي:

$$e_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{du_j}{dx_i}\right)+\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{du_j}{dx_i}\right)$$

الجزء غير المتماثل من مصفوفة معدل التشكل هو معدل الدوران للحجم المعين في حقل التدفق حول محاوره، أما الجزء المتماثل فهو معدل تأثير القوى المماسية على الحجم المعين.

٢-١٠ معادلات تأسيسية (CONSTTUTIVE EQUATIONS)

يهدف هذا الفصل إلى إيجاد علاقة تربط مركبات مصفوفة الإجهاد σ_{ij} بمركبات مصفوفة معدل التشكل e_{kl} عن طريق مجموعة من المعاملات التي تُحسب تحليلياً، ما عدا معاملي اللزوجة، حيث يتم حسابهما تجريبياً.

لإيجاد هذه المعاملات نحتاج إلى مسلمات المائع النيوتوني، مثل الماء والهواء، والعديد من الموائع الشائعة، كما يجدر الإشارة إلى وجود موائع لا تتصرف مثل الموائع النيوتونية، وهي موضع دراسات وأبحاث حالية، مثل الموائع اللزجة المرنة (Viscoelastic) التي تستخدم خصائصها في تخفيض الاحتكاك، ولأن هذا البحث يدرس المبادئ الأساسية التقليدية، فإن المائع النيوتوني هو محل اهتمامنا.

وجد العلماء عن طريق الملاحظة أربعة شروط تحققها مصفوفة الإجهاد σ_{ij}، هي:

١- إذا كان المائع في حالة سكون، فإن الضغط الواقع عليه هو الضغط الهيدروستاتيكي - ضغط ساكن -، والضغط المبذول من المائع هو ضغط حراري ديناميكي.

٢- ترتبط مصفوفة الإجهاد σ_{ij} بعلاقة خطية مع مصفوفة معدل التشكل e_{kl} وتعتمد فقط عليه.

٣- بما أنه لا يوجد إجهاد مماسي يؤثر على المائع عندما يدور دوران جسم صلد، إذاً لا توجد قوة إجهاد مماسية تؤثرعلى الحركة الدورانية للمائع.

٤- لا توجد اتجاهات مفضلة في المائع، لذلك فإن خصائص المائع هي دوال تعتمد على الموقع وليس الاتجاه.

الشرط الأول يتطلب أن تكون مصفوفة الإجهاد σ_{ij} على الصورة:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

حيث أن τ_{ij} يعتمد على حركة المائع فقط ويُسمى بمصفوفة الإجهاد المماسي، أما p فترمز إلى مقدار الضغط الديناميكي الحراري، و δ_{ij} (Kronecker delta) يُعرّف كالتالي:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & if \quad i = j \\ 0 & if \quad i \neq j \end{cases}$$

نلاحظ أن إشارة الحد الذي يحتوي على الضغط سالبة لأن اتجاه الضغط في عكس اتجاه الإجهاد العامودي. وقد اعتبرنا أن اتجاه الإجهاد العامودي في الاتجاه الموجب.

الشرط الثاني يُمَكِننا من ربط مصفوفة الإجهاد المماسي τ_{ij} بمصفوفة معدل التشكل e_{kl} بعلاقة خطية. وهذه العلاقة الخطية هي ما يميز الموائع النيوتونية عن غيرها. ففي الحالة العامة مصفوفة الإجهاد المماسي قد تعتمد على تفاضلات السرعة مرفوعة لقوى غير الواحد، وقد تعتمد على السرعة ايضاً.

يرتبط كل عنصر من عناصر مصفوفة الإجهاد المماسي τ_{ij} التسعة بعلاقة خطية مع عناصر مصفوفة معدل التشكل e_{kl} التسعة. بالتالي عدد المعاملات التي تربط عناصر المصفوفتين بعلاقة خطية هي 81 معامل، أي يمكن تمثيل مصفوفة المعاملات بمصفوفة ذات الرتبة الرابعة. إذا يمكننا التعبير عن المصفوفة τ_{ij} كالتالي:

$$\tau_{ij} = \alpha_{ijkl} e_{kl}$$

$$\tau_{ij} = \alpha_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

في الفصل السابق تعرفنا على مصفوفة معدل التشكل e_{kl} وهي مصفوفة من الرتبة الثانية، ويمكن تقسيمها إلى جزء متماثل يمثل الإجهاد المماسي، وجزء غير متماثل يمثل الدوران. وإذا تم تنفيذ حركة دوران جسم صلد في حقل جريان المائع، فإنه بالرجوع إلى الشرط الثالث ينبغي أن لا تكون أي قوة إجهاد مماسي تؤثر على المائع، أي أن الجزء غير المتماثل من مصفوفة معدل التشكل e_{kl} يساوي صفر. لتحقيق الشرط الثالث فإن معامل الجزء الخاص بالدوران - غير المتماثل - من مصفوفة معدل التشكل e_{kl} لا بد أن يساوي الصفر، وبالتالي تصبح العلاقة التأسيسية من الإجهاد على الصورة التالية:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} \beta_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

حيث أن عناصر المصفوفة β_{ijkl} من الرتبة الرابعة غير محددة إلى الآن. يبقى الآن الشرط الرابع والذي يمكن تسميته بشرط الاتجاهات اللامتغيرة والذي يضمن بأن تكون النتائج لا تعتمد على الاتجاهات في المستوى الإحداثي.

يجدر الإشارة إلى أن المصفوفات الأكثر عموماً والتي تحمل خاصية الاتجاهات اللامتغيرة تكون على الصورة:

$$\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) + \gamma \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \right)$$

حيث أن λ و μ و γ هي ثوابت.

نجد أن تطبيق شرط الاتجاهات اللامتغيرة والشرط الثالث في حالة المصفوفة β_{ijkl} تجعل قيمة المعامل γ تساوي صفر.

إذاً يمكننا التعبير عن مصفوفة الإجهاد المماسي τ_{ij} على النحو التالي:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}\left[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\right]\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$$

إذا كان $k = l$ فإن:

$$\frac{1}{2}\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) = \lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

إذا استبدلنا المتغير k بالمتغير i، والمتغير l بالمتغير j، فإن:

$$\frac{1}{2}\mu\delta_{ik}\delta_{jl}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

استبدال المتغير l بالمتغير i، والمتغير k بالمتغير j:

$$\frac{1}{2}\mu\delta_{il}\delta_{jk}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

من مما سبق، يمكننا التعبير عن مصفوفة الإجهاد المماسي:

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

إذاً العلاقة التأسيسية لمصفوفة الإجهاد في الموائع النيوتونية تكون كالتالي:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (2.7)$$

وبذلك نكون قد عبرنا عن مركبات مصفوفة الإجهاد σ_{ij} التسعة بدلالة الضغط وتفاضلات السرعة، بالإضافة للعوامل λ و μ، وهذان العاملان يمكن تحديد قيمتهما تجريبياً لا تحليلياً.

العلاقة التأسيسية الثانية تتضمن متجه انتشار الحرارة q_j الناتج عن التوصيل فقط، ويمكن التوصل إلى هذه العلاقة من قانون فورير (Fourier law) للتوصيل الحراري الذي ينص على أن انتشار الحرارة بالتوصيل يتناسب مع سالب مقدار تغير درجة الحرارة بالنسبة للزمن:

$$q_j = -k\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.8)$$

المتغير k يمثل معامل التناسب في قانون فورير للتوصيل الحراري.

٢-١١ معاملات اللزوجة (VISCOSITY COEFFICIENTS)

إن هدف هذا الفصل هو الوصول إلى تفسير فيزيائي للمعاملات λ و μ الظاهرة في المعادلات التأسيسية حتى نتمكن من إيجاد طريقة لحسابها.

إذا أخذنا في الاعتبار تدفق مماسي بسيط لمائع غير قابل للانضغاط، مركبات سرعته معرفة كالتالي:

$$u = u(y)$$

$$v = w = 0$$

كما نلاحظ أن مركبة السرعة في اتجاه محور x لا تساوي الصفر، وقيمتها دالة في y فقط، بينما مركبة السرعة في اتجاه المحور y والمحور z تساوي الصفر، من خصائص تدفق المائع نستطيع معرفة عناصر مصفوفة الإجهاد من معادلة (2.7):

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu\frac{du}{dy}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$$

نلاحظ أن عناصر المصفوفة والتي تمثل الإجهاد العامودي جميعها تمثل الضغط الديناميكي الحراري، بينما عناصر المصفوفة والتي تمثل الإجهاد المماسي فإن أربعة منها تساوي صفر واثنان منها تتناسب مع تفاضلات السرعة، وعامل التناسب هو المتغير μ، والذي يعبرعن اللزوجة الديناميكية للمائع حسب قانون نيوتن للزوجة، وغالباً ما تُستبدل اللزوجة الديناميكية باللزوجة الحركية التي تُعرف بالعلاقة $\vartheta = {}^{\mu}/_{\rho}$.

لمعرفة قيمة معامل اللزوجة الثاني λ، فإننا نحسب متوسط عناصر الإجهاد العمودي، نجد أن:

$$-\bar{p} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

إن متوسط الإجهاد العامودي هو الضغط الميكانيكي للمائع، ويساوي ثلث حاصل جمع عناصر القطر الرئيسي في مصفوفة الإجهاد. بما أن الضغط الميكانيكي إما أن يكون ضغط ساكن -هيدروستاتيكي- فقط، أو ان يكون ضغط ساكن بالإضافة إلى مركبة الإجهاد الناتجة عن حركة المائع، فإنه عموماً يكون الضغط الميكانيكي مختلف عن الضغط الحراري الديناميكي p.

نوجد قيمة $\bar{p}$ من خلال إيجاد قيم σ_{11} و σ_{22} و σ_{33} من المعادلة التأسيسية، كالتالي:

$$-\bar{p} = \frac{1}{3}\left[\left(-p + \lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(-p + \lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(-p + \lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$-\bar{p} = -p + \lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$$= -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

إذاً الفرق بين الضغط الديناميكي الحراري والضغط الميكانيكي يتناسب مع انحراف متجه السرعة، وعامل التناسب هو عامل اللزوجة الكلية، نرمز له بالرمز K:

$$p - \bar{p} = K\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

حيث أن $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$، وهذه العلاقة تجمع بين معاملات اللزوجة الثلاثة μ و K و λ بحيث يوجد معاملان فقط مستقلان، ويعرف الثالث بدلالتيهما. سبق وقد تعرفنا على قمية المعامل μ، وسنوجد في هذا الفصل علاقة رياضية لحساب المعامل k، يتبقى لنا فقط معرفة قيمة المعامل λ، حيث يمكن حسابه λ بالعلاقة الرياضية $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$.

إن الضغط الميكانيكي للغازات يقيس انتقال الطاقة بين الجزيئات فقط، أما الضغط الديناميكي الحراري للغازات يقيس الطاقة كاملة، ويتضمن أوضاع انتقال الطاقة وهي: الوضع الاهتزازي والوضع الدوراني، إضافة إلى الوضع الانتقالي. بينما في السوائل نجد أوضاع أخرى للطاقة بالإضافة لهذه الأوضاع مثل الجاذبية بين الجزيئات.

لهذه الأوضاع المختلفة لطاقة الجزيئات اوقات استرخاء، بمعنى أنها تكون في وضع ما من أوضاع الطاقة ثم تستقر، ولكن سرعان ما تعود إلى وضع آخر، بالتالي فإنه من الممكن مع تدفق المائع أن نجد تغير للطاقة من وضع لآخر.

من العلاقة $p-\bar{p}=K\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ نجد أن من معامل اللزوجة K هو قياس تحول الطاقة من وضع الانتقال إلى الأوضاع الأخرى.

إذا كان المائع عبارة عن غاز أحادي الذرة فإن الوضع الوحيد للطاقة الجزيئية هو وضع الانتقال، وبذلك فإن الضغط الميكانيكي والضغط الديناميكي الحراري متساويان، وفي هذه الحالة فإن معامل اللزوجة K يساوي الصفر، بناءً على ذلك يمكننا استنتاج علاقة ستوكس (*Stokes' relation*)

$$\lambda=-\frac{2}{3}\mu$$

إذاً في حالة الغازات أحادية الذرة نجد أن واحد فقط من معاملات اللزوجة مستقل، أما في الغازات متعددة الذرات والسوائل فإن قيمة K غالباً لا تبتعد عن الصفر إلا بمقدار صغير. عموماً فإنه في أي حالة من حالات الموائع غير قابلة للانضغاط فإن المعامل λ لا يحدث فرقاً والسبب في ذلك أنه من معادلة الاتصال فإن الحد الذي يحتوي على λ يساوي الصفر.

٢-١٢ معادلات نافير- ستوكس (NAVIER-STOKES EQUATION)

تنتج معادلات نافير- ستوكس الشهيرة من معادلة حفظ العزم (2.4) والمعادلة التأسيسية للموائع النيوتونية (2.7)، وبما أننا استطعنا من معادلة (2.7) حساب مصفوفة الإجهاد فإنه بالتعويض عنها في الحد $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$ الموجود في معادلة حفظ العزم (2.4)، نحصل على:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-p\delta_{ij}+\lambda\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

نستبدل كل i في الحدين الأول والثاني بـ j لتلافي حالة الصفر:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

نعوض بالمعادلة السابقة في معادلة حفظ العزم (2.4) نجد:

$$\rho\frac{\partial u_j}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+\rho f_j \qquad (2.9a)$$

المعادلة (2.9a) تمثل معادلة نافير- ستوكس في صورتها العامة والتي تمثل ثلاث معادلات عددية مقابل ثلاث قيم محتملة لـ $j=1,2,3$.

يتعذر حل معادلات نافير- ستوكس الثلاثة في صورتها العامة، إلا أن بعض الحالات الخاصة تسمح بتبسيط المعادلة وإيجاد حلاً لها، من هذه الحالات والتي تُعد الأكثر شيوعاً هي حالة الموائع غير قابلة للانضغاط ذات اللزوجة الديناميكية الثابتة، وبما أن المائع غير قابل للإنضغاط وبالرجوع إلى معادلة الاتصال، فإن:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0$$

وبالتعويض عن ما سبق في المعادلة (2.9) نلاحظ أن الحد الثاني من الطرف الأيمن يساوي صفر، ونتوصل إلى:

$$\rho\frac{\partial u_j}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+\rho f_j$$

أما الحد المتعلق باللزوجة المماسية -الحد الثاني من الطرف الأيمن- يصبح كالتالي:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]=\mu\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$=\mu\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$$

$$=\mu\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_i}\right]$$

$$=\mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_i}$$ (بما أن $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$)

معادلة نافير- ستوكس للموائع غير قابلة للانضغاط وعند كثافة ثابتة هي:

$$\rho\frac{\partial u_j}{\partial t}+\rho u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_i}+\rho f_j \qquad (2.9b)$$

عندما تكون اللزوجة صغيرة جداً فإنه يمكن إهمالها، فتصبح المعادلة على الصورة:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_j \qquad (2.9c)$$

تُعرف المعادلة الأخيرة بمعادلة أويلر.

في حالة الموائع غير القابلة للانضغاط تكون معادلات نافير- ستوكس كالتالي:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 u + \rho f_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 v + \rho f_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 w + \rho f_z$$

٢-١٣ معادلة الطاقة (ENERGY EQUATION)

من المعادلة التأسيسية للمصفوفة σ_{ij} فإنه يمكن التعبير عن معادلة حفظ الطاقة بوضوح أكثر:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$$

بالتعويض عن قيمة σ_{ij} من المعادلة التأسيسية، نجد أن الحد الأول من الطرف الأيمن يصبح كالتالي:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \left[-p\delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

نستبدل كل i في الحدين الاول والثاني بـ j لتلافي حالة الصفر:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (*)$$

وأيضاً من المعادلة التأسيسية الثانية والخاصة بمتجه انتشار الحرارة q_j فإنه يمكن التعبيرعن q_j كالتالي:

$$q_{\mathrm{j}} = -\mathrm{k} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}}$$

مما سبق تصبح معادلة حفظ الطاقة على الصورة:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (2.10)$$

٢-١٤ المعادلات التي تحكم تدفق الموائع النيوتونية (GOVERNING EQUATIONS FOR NEWTONIAN FLUIDS)

المعادلات التي تنظم حركة الموائع النيوتونية هي:

١- معادلة الاتصال:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = 0$$

٢- معادلات نافير- ستوكس:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] + \rho f_j$$

٣- معادلة حفظ الطاقة:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

٤- معادلات الحالة، وهي معادلات عامة الهدف منها ربط المتغيرات التابعة ببعضها بعلاقات فيزيائية حتى نتمكن من إيجاد حلول للمعادلات وتحديد قيم لجميع المجاهيل، وهنا نلاحظ أن معادلات الحالة تصف الضغط وأيضاً الطاقة الداخلية بدلالة الكثافة ودرجة الحرارة كالتالي:

$$p = p(\rho, T)$$
$$e = e(\rho, T)$$

نلاحظ أن عدد المعادلات السابقة هي سبعة معادلات في سبعة مجاهيل هم: الضغط p، والكثافة ρ، والطاقة الداخلية e، مركبات السرعة u_j، ودرجة الحرارة T. أما بالنسبة للمعاملات λ و μ و k فإننا نفترض أن قيمتها معروفة من بيانات التجارب، وقد تكون قيم ثابتة أو دوال في متغيرات في الضغط ودرجة الحرارة.

نستطيع تعريف حقل جريان المائع بدون حل جميع المعادلات السابقة، فمثلاً لو كان المائع الذي نريد وصف حقل جريانه غير قابل للانضغاط فإن معادلة الاتصال ومعادلات نافير- ستوكس تكون أبسط، حيث أن معادلة الاتصال تصبح:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

وتكون معادلات نافير- ستوكس كالتالي:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} + \rho f_j$$

من معادلة الاتصال ومعادلات نافير- ستوكس نستطيع إيجاد قيمة مركبات السرعة الثلاثة والضغط بدون الرجوع لمعادلة حفظ الطاقة، بعد ذلك يمكن إيجاد درجة حرارة حقل جريان المائع.

٢-١٥ الشروط الحدية (BOUNDARY CONDITIONS)

تُعد معادلات نافير- ستوكس معادلات تفاضلية جزئية غير خطية، فالنوع المناسب من الشروط الحدية المفترض استخدامها هي شروط (Dirichlet or Neumann) على الحدود المغلقة. فيزيائياً هذا النوع عادة يحدد قيمة السرعة عند جميع الحدود الصلبة. أيضاً مبدأ الاستمرارية يحتم على عدم وجود انزلاق بين المائع والجدار الملاصق به. بمعنى أن سرعة المائع الملاصق بالجدار هي نفس سرعة الجدار، ورياضياً:

$$U = u$$

حيث U سرعة الجدار، و u سرعة المائع الملاصق للجدار.

في حالة انتشار المائع فإنه يمكن وضع شرط حدي بحيث تكون سرعة المائع تقترب من الصفر عند المالانهاية، أي أن:

$$u \rightarrow 0 \quad as \quad x \rightarrow \infty$$

وكل ظاهرة تصف دراسة معينة للمائع لها شروطها الحدية الخاصة.

المراجع العربية

[١]- المهندس: محمد عبدالرضا الشمري- ميكانيك الموائع ـ دار صفاء للطباعة والنشر ـ ٢٠٠٨ م

[٢]- عبدالجبار خلف الجميلي ، ضياء الدين حسين علوان- ميكانيك الموائع ـ اليازوي ـ ٢٠٠٦م

[٣]- م. شريف فتحي الشافعي- المرجع الكامل في ميكانيكا الموائع ـ دار الكتب العلمية ـ ٢٠١٠م

المراجع الاجنبية

[1]- J. M. McDonough. LECTURES IN ELEMENTARY FLUID DYNAMICS..(2009).

[2]- L. L. Faulkner. Fundamental Mechanics of Fluids.(Third Edition).New York: MARCEDLE KKEIRN,IN C.(2003).

[3]- http://ar.wikipedia.org