الجبر

ظهرت لفظة الجبر لأول مرة في كتاب العالم الخوارزمي (الجبر والمقابلة).. قال الآملي في معنى كلمتي الجبر والمقابلة مايلي: "وتستعمل ما يتضمنه السؤال سالكا على ذلك المنوال لينتهي إلى المعادلة.. والطرف ذو الاستثناء يكمل ويزداد على الآخر وهو الجبر.. والأجناس المتجانسة المتساوية في الطرفين تسقط منها وهو المقابلة".. أي:

$$bx + 2c = x^2 + bx - c$$

بالجبر

$$bx + 2c + c = x^2 + bx$$

بالمقابلة

$$3c = x^2$$

هناك جذور لعلم الجبر تمتد إلى ما قبل الخوارزمي.. موجودة في الرياضيات البابلية وفي كتاب الأصول لإقليدس وفي حساب ديوفنطس.. لكن هذه الجذور القديمة كانت وليدة مسائل مطروحة.. فالخوارزمي هو أول من أسس هذا العلم ووضع له مفرداته الأولية ومفاهيمه بحيث أصبح علمًا منفصلا عن الحساب والهندسة.. فكان هدف الخوارزمي واضح.. لم يكن إطلاقًا في تصور من سبقه.. ويتلخص هذا الهدف بإنشاء نظرية معادلات قابلة للحل بواسطة الجذور بحيث يمكن أن ترجع إليها مسائل علمي الحساب والهندسة على السواء..

ابتدأ الخوارزمي كتابه الجبر والمقابلة بقوله:

"لم يزل العلماء في الأزمنة الخالية والأمم الماضية يكتبون الكتب مما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة نظرًا لمن بعدهم واحتسابًا للأجر بقدر الطاقة.. ورجاء أن يلحقَهم من أجر ذلك وذخرهِ وذكرهِ ويبقى لهم من لسان الصدق ما يصغُر في جنبه كثيرًا مما كانوا يتكلفونه من المؤونة ويحملونه على أنفسهم من المشقة في كشف أسرار العلم وغامضه .. إما رجل سبق إلى ما لم يكن مستخرجًا قبله فورثه من بعده.. وإما رجل شرح مما أبقى الأولون مما كان مستغلقًا فأوضح طريقه وسهل مسلكه وقرب مأخذه.. وإما رجل وجد في بعض الكتب خللا فلمَّ شعثه وأقام أُوَده وأحسن الظن بصاحبه غير راد عليه ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه.... "

يذكر الخوارزمي في مقدمته أيضا أن هدفه هو توفير كتاب موجز للناس يعالجون فيه مسائلهم الحسابية ومبادلاتهم التجارية وميراثهم ومسح أراضيهم.. قسم الخوارزمي كتابه كالتالي:

- القسم الأول وهو نظري مخصص لإقامة حساب الجبر والمقابلة..
- القسم الثاني حدد فيه أسس الطرق المنتظمة التي تسمح بإعادة جميع مسائل العمليات الحسابية إلى أنواعها الجبرية الأساسية..
- والأقسام الأخيرة عالج فيها كيفية تطبيق هذا الحساب على المعاملات التجارية ومسح الأراضي والقياسات الهندسية والوصيات..

حدد الخوارزمي في القسم الأول من كتابه التعابير الأولية لنظريته: المجهول وسماه الجذر أو الشيء (أي x).. مربع المجهول وسماه المال (أي x^2).. الأعداد المنطقية الموجبة وسماها العدد المفرد.. القوانين الحسابية وعلاقة المساواة.. وتفرع من هذه التعابير التالي:

المال في الشيء يساوي كعبًا (x^3)

مال المال (x^4)

مال الكعب (x^5)

كعب الكعب (x^6)

جزء الشيء (معكوس الشيء $\frac{1}{x}$)

جزء المال ($\frac{1}{x^2}$)

حدد كذلك المفاهيم الأساسية المستعملة من قبله: المعادلة من الدرجة الأولى والثانية.. ثنائية الحد وثلاثية الحدود المقترنة بها.. الشكل المنتظم.. الحل بطريقة الحساب.. وقابلية البرهنة لصيغة الحل.. فيقول الخوارزمي في كتابه:

"... ووجدت هذه الضروب الثلاثة التي هي الجذور والأموال والعدد تقترن فيكون منها ستة أجناس مقترنة وهي أموال وجذور تعدل عددًا ($ax^2 + bx = c$).. وأموال وعدد تعدل جذورًا ($ax^2 + c = bx$).. وجذور وعدد تعدل أموالاً ($bx + c = ax^2$).. وأموال تعدل جذورًا ($ax^2 = bx$).. وأموال تعدل عددًا ($ax^2 = c$).. وجذور تعدل عددًا ($bx = c$).."

نجد هنا أن الخوارزمي في كتابه الجبر والمقابلة انطلق من المفردات الأولية ليعطي كل النماذج للمعادلة التي تظهر لذاتها.. فلم تنشأ ببساطة أثناء حل مسألة بل إنها مقصودة لترمز إلى صفٍ لا نهائيٍ من المسائل..

ارتفع الخوارزمي إلى مرحلة ثانية من التعميم (وهي مرحلة وضع الشكل المنتظم).. فيقول:

"... وكذلك، لو ذكر مالان أو ثلاثة أو أقل أو أكثر.. فارددە إلى مالٍ واحد واردد ما كان معه من الأجذار والعدد إلى مثل ما رددت إليه المال.."

ويقصد بذلك وضع المعادلة في أحد الأشكال التالية:

$$x^2 + q = px$$

$$x^2 = px + q$$

$$x^2 + px = q$$

ويكتب الخوارزمي في وضع صيغ حساب الحلول معتبرا أن q=39, p=10:

"... فبابه أن تنصف الأجذار وهي في هذه المسألة خمسة فنضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين($\left(\frac{p}{2}\right)^2$)... فتزيدها على التسعة والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية ($\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$).. وتنقص منه نصف الأجذار وهو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذي تريد ($x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$).."

توصل الخوارزمي إلى صيغ الحلول: إذا كان $q < \left(\frac{p}{2}\right)^2$ فإن:

$$x = \left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

وإذا كان $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ .."فجذر المال مثل نصف الأجذار سواء لا زيادة ولا نقصان.." أي $x = \left(\frac{p}{2}\right)$

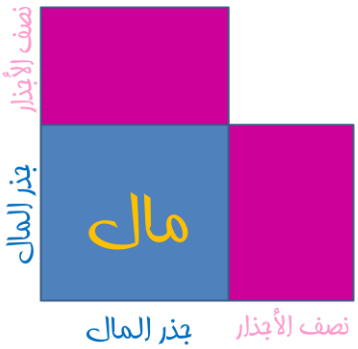
وإذا كان $q > \left(\frac{p}{2}\right)^2$ .."واعلم أنك إذا نصفت الأجذار وضربتها في مثلها فكان يبلغ ذلك أقل من الدراهم التي مع المال فالمسألة مستحيلة.."

شرح الخوارزمي في كتابه المسألة التالية:

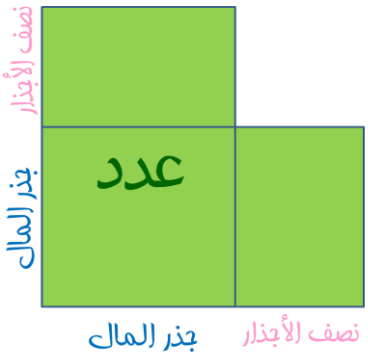
"مالان وعشرة أجذار تعدل ثمانية وأربعين درهما... ينبغي أن ترد المالين إلى مال واحد وقد علمت أن مالا من مالين نصفهما.. فاردد كل شيء في المسألة إلى نصفه فكأنه قال: مال وخمسة أجذار يعدل أربعة وعشرين درهما.. ننصف الأجذار فتكون اثنين ونصفا.. فاضربهما في مثلها فتكون ستة وربعًا.. فزدها على الأربعة والعشرين فيكون ثلاثين درهما وربع درهم.. فخذ جذرها وهو خمسة ونصف فانقص منها نصف الأجذار وهو اثنان ونصف يبقى ثلاثة وهو جذر المال.. والمال تسعة.. "

برهن الخوارزمي هندسيًا حل معادلته.. نأخذ على سبيل المثال شكل المعادلة (مال وأجذار تعدل عدد).. فمثّل المال بأنه مربع:

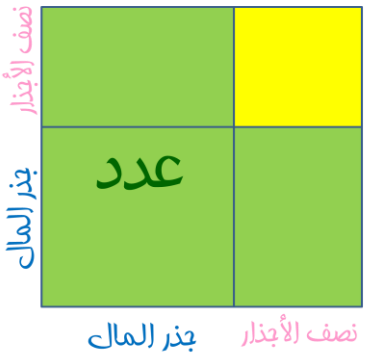
أضاف إلى المال الأجذار:



المساحة للشكل السابق هي مال و اثنين من جذر المال في نصف الأجذار.. أي أن المساحة مال وجذر المال في الأجذار .. ولكن من المعادلة مال وأجذار تعدل عدد .. إذا المساحة تساوي العدد الموجودة في المعادلة..



نضيف مربع لنكمل شكل المربع الكبير:

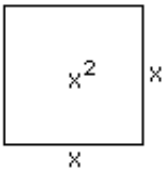


الآن مساحة المربع الكامل تساوي عدد ومربع نصف الأجذار.. وضلع المربع الكامل يساوي الجذر التربيعي لمربع نصف الأجذار والعدد.. ولكن... ضلع المربع الكامل يساوي أيضًا جذر المال ونصف الأجذار .. إذا... جذر المال ونصف الأجذار تساوي الجذر التربيعي لمربع نصف الأجذار والعدد.. إذا...

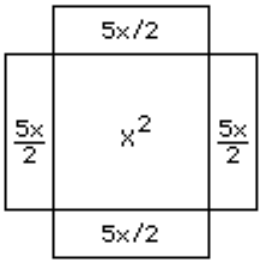
جذر المال = الجذر التربيعي لمربع نصف الأجذار والعدد ننقص منه نصف الأجذار

ولمزيد من التوضيح نطبق برموز رياضية طريقة إثبات الخوارزمي لحل المعادلة $x^2 + 10x = 39$:

نمثّل المال x^2 **كمربع:**



نضيف على مربع المال x^2 **الأجذار الموجودة في المعادلة أي** $10x$ **(سنضيف أربعة مستطيلات مساحتها الكلية** $10x$ **أي مساحة المستطيل الواحد هو** $\frac{5}{2}x$**):**



الآن مساحة الشكل السابق هي:

$$area = x^2 + 4\left(\frac{5}{2}\right)x = x^2 + 10x$$

ولكن من المعادلة $x^2 + 10x = 39$ إذا مساحة الشكل تساوي 39..

نضيف مربعات لنكمل شكل المربع الكبير:

مساحة المربعات الصغيرة هي $4\times\left(\frac{5}{2}\right)\times\left(\frac{5}{2}\right) = 25$ .. إذًا مساحة المربع الكبير هي $39 + 25 = 64$.. إذا طول الضلع في المربع الكبير هو $\sqrt{64} = 8$ ... ولكن طول الضلع في المربع الكبير هو أيضًا $\frac{5}{2} + x + \frac{5}{2}$ .. إذًا:

$$\frac{5}{2} + x + \frac{5}{2} = 8$$

$$x + 5 = 8$$

إذًا الجذر هو $x = 3$..

استعمل علماء العرب بعد الخوارزمي الرموز في الأعمال الرياضية.. فرمزوا لعلامة الجذر التربيعي ج .. ول المجهول (الشيء) ش .. ولمربع المجهول (المال) م .. ولمكعب المجهول (كعب) ك .. ولعلامة المساواة ل .. ولعلامة النسبة ∴

فمثلا المعادلة $5x^2 = 12x + 54$ تكتب:

م ش

5 ل 12 54

عمم العالم سنان بن الفتح مفهوم القوة الجبرية على المعادلات فدرس معادلات ثلاثية حدود يمكن ردها في حال قسمتها على قوة ملائمة للمجهول إلى معادلات الخوارزمي:

$$ax^{2n+p} + bx^{n+p} = cx^p$$

شغلت علماء الجبر الحسابيين من أتباع الكرخي المعادلة التكعيبية.. حيث تطرق السلمي لنوعين من المعادلات التي اعتبرهما ممكنين:

$$x^3 + ax^2 + bx = c$$

$$x^3 + bx = ax^2 + c$$

ولكن اشترط لحلها أن تكون $b = \frac{a^2}{3}$..

درس الخوارزمي بعض مظاهر تطبيق القوانين الأولية للحساب على العبارات الرياضية.. فيقول في كتابه:

"... وأنا مخبرك كيف تضرب الأشياء وهي الجذور، بعضها في بعض إذا كانت منفردة أو كان معها عدد أو كان مستثنى منها عدد...."
ويقصد بذلك التعابير التالية:

$$(a \pm bx)\ (c \pm dx)$$

$$a,b,c,d \text{ belong to } Q^{+}$$

قد تكون هذه الدراسة بدائية ولكنها كانت المحاولة الأولى المكرسة لدراسة الحساب الجبري بحد ذاته.. ساعدت العالم الكرخي الأبحاث التي توصل إليها الخوارزمي في إعداد مشروع حسبنة الجبر.. وهو حسب تعبير العالم السموأل:

"الطريق إلى التصرف في المجهولات بجميع الأدوات الحسابية كما يتصرف الحاسب في المعلومات... "

ومن جهة أخرى الاستعاضة تدريجيًا عن البراهين الهندسية بالبراهين الجبرية.. بدأ الكرخي في دراسة منهجية للأسس الجبرية فدرس المتتاليتين:

$$x, x^2, x^3, ..., x^9; \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, ..., \frac{1}{x^9}$$

فصاغ القوانين التالية:

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = ...$$
$$\frac{1}{x}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}, ..., \frac{1}{x^n}\frac{1}{x^m} = \frac{1}{x^{n+m}}$$
$$\frac{1}{x}x^2 = \frac{x^2}{x}, ..., \frac{1}{x^n}x^m = \frac{x^m}{x^n}$$

استفاد السموأل من دراسة الكرخي وأوجد ولأول مرة القاعدة المكافئة: $x^n x^m = x^{n+m}$..

توصل الكرخي للمرة الأولى في تاريخ الرياضيات إلى إعطاء طريقة في استخراج الجذر التربيعي لكثيرة الحدود ذات معاملات موجبة.. تتلخص الطريقة بإجراء التحليل على المقدار الجبري:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2$$

حيث اقترح له الشكل القانوني التالي:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + (x_2^2 + 2x_1x_3) + 2x_2x_3 + x_3^2$$

هذه العبارة الأخيرة هي كثيرة حدود مرتبة حسب القوى المتناقصة.. فيطرح هنا الكرخي المسألة العكسية وهي: إيجاد الجذر التربيعي لخماسية الحدود.. جعلها الكرخي كثيرة حدود خماسية بأن ضم الحد الثالث والرابع في قوس.. وقد يكون التفسير في جعلها خماسية وقوله بأنها مرتبة حسب القوى المتناقصة التالي.. لو قمنا بتربيع نفس المقدار $(x_1 + x_2 + x_3)$ ولكن وضعنا قوى متناقصة نجد أن:

$$\begin{array}{l} x_1^{\,3} + x_2^{\,2} + x_3 \\ x_1^{\,3} + x_2^{\,2} + x_3 \\ \hline x_1^6 + x_1^{\,3}x_2^{\,2} + x_1^{\,3}x_3 \\ \quad + x_2^{\,2}x_1^{\,3} + x_2^{\,4} + x_2^{\,2}x_3 \\ \quad\quad + x_3x_1^{\,3} + x_2^{\,2}x_3 + x_3^{\,2} \\ \hline x_1^6 + 2x_1^{\,3}x_2^{\,2} + (x_2^4 + 2x_1^{\,3}x_3) + 2x_2^{\,2}x_3 + x_3^2 \end{array}$$

نلاحظ أن الناتج هو كثيرة حدود مرتبة حسب القوى المتناقصة.. وأن مجموع قوى الحد الثالث والرابع متساوي..

يقترح الكرخي طريقتين لإيجاد الجذر التربيعي لخماسية لحدود..

<u>الطريقة الأولى</u>: أخذ حاصل جمع جذري حدي الطرفين الأول والأخير $x_1 + x_3$ وخارج الحد الثاني على ضعفي جذر الأول $\frac{2x_1x_2}{2x_1} = x_2$ أو خارج الحد الرابع على ضعفي جذر الحد الأخير $\frac{2x_3x_2}{2x_3} = x_2$ .. إذا الجذر التربيعي لخماسية الحدود هو المقدار $(x_1 + x_2 + x_3)$

فمثلا.. لإيجاد الجذر التربيعي لخماسية الحدود: $x^6 + 4x^5 + (4x^4 + 6x^3) + 12x^2 + 9$

نقوم بالتالي:

$$\sqrt{x^6} = x^3$$
$$\sqrt{9} = 3$$
$$\frac{4x^5}{2x^3} = 2x^2 or \frac{12x^2}{2 \cdot 3} = 2x^2$$

إذًا الجذر التربيعي هو: $(x^3 + 2x^2 + 3)$

<u>الطريقة الثانية:</u> طرح ضعفي ضرب جذر الحد الأول بجذر الحد الأخير من الحد الثالث $(x_2^2 + 2x_1x_3) - 2x_1x_3 = x_2^2$

ثم إضافة جذر باقي عملية الطرح إلى جذري حدي الطرفين الأول والأخير.. نحصل على الجذر التربيعي $(x_1 + x_2 + x_3)$

فمثلا.. لإيجاد الجذر التربيعي لخماسية الحدود: $x^8 + 2x^6 + 11x^4 + 10x^2 + 25$

نقوم بالتالي:

$$11x^4 - 2\cdot x^4 \cdot 5 = x^4$$
$$\sqrt{x^4} = x^2$$

إذًا الجذر التربيعي هو: $(x^4 + x^2 + 5)$**.. (ما هي الشروط التي لا بد أن تتوفر في خماسية الحدود حتى يكون لها جذر تربيعي؟؟).. عمم السموأل حل المسألة لكثيرة حدود ذات معاملات نسبية..**

كان الكرخي هو أول من أوجد مثلث لإيجاد معاملات مفكوك ذي الحدين والذي يعرف الآن بمثلث باسكال:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Col1	Col2	Col3	Col4	Col5	...
1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
	1	3	6	10	...
		1	4	10	...
			1	5	...
				1	...

فالعامود الأول هو معاملات $(a+b)^1$ **والعامود الثاني هو معاملات مفكوك** $(a+b)^2$ **وهكذا..**

يقول الكرخي إن استخراج المجهولات انطلاقا من مقدمات معلومة هي المهمة الخاصة بالجبر.. فغرض الجبر في الواقع هو تبيان كيفية استخراج الكميات المجهولة بواسطة الكميات المعلومة عن طريق تحويل المعادلات المعروضة.. درس الكرخي أنواع كثيرة من المعادلات.. معادلة ذات مجهول واحد.. معادلة ذات مجهولين.. معادلة ذات ثلاثة مجاهيل..معادلتان بمجهولين.. معادلتان بثلاثة مجاهيل.... وهكذا

صاغ السموأل قاعدة للإشارات فيقول:

"إن ضرب الناقص في الزائد ناقص.. وفي الناقص زائد.. وأنّا إذا نقصنا عددًا زائدًا من عدد ناقص.. بقي مجموع العددين ناقصًا.. وإذا نقصنا عددًا ناقصًا من ناقص أكثر منه بقي تفاضلهما ناقصًا.. وإن كان الناقص أقل من المنقوص بقي تفاضلهما زائدًا.. وإذا نقصنا الناقص من الزائد بقي مجموعهما زائدًا.. وإذا نقصنا زائدًا من مرتبة خالية بقي فيها ذلك العدد بعينه ناقصًا.. وإذا نقصنا الناقص من مرتبة خالية بقي فيها ذلك العدد زائدًا.."

$$x \le 0, y \ge 0 \Rightarrow xy \le 0$$
$$x \le 0, y \le 0 \Rightarrow xy \ge 0$$
$$x \le 0, y \ge 0 \Rightarrow x - y \le 0$$
$$x \le 0, y \le 0, |x| \ge |y| \Rightarrow x - y \le 0$$
$$x \le 0, y \le 0, |x| \le |y| \Rightarrow x - y \ge 0$$
$$x \ge 0 \Rightarrow 0 - x \le 0$$
$$x \le 0 \Rightarrow 0 - x \ge 0$$

برهن السموأل بعض القضايا المتعلقة بالتبادلية والتجميعية لعملية الضرب ولتوزيعية الضرب على الجمع.. منها:

قضية1 : كل أربعة أعداد فإن ضرب مسطح الأول والثاني في مسطح الثالث والرابع مساوٍ لضرب مسطح الأول والثالث في مسطح الثاني والرابع..(ab)(cd)=(ac)(bd)

البرهان: نفرض أن ab=m, ac=n, cd=k, bd=g **الآن نسبة** g:k = b:c **إذًا** m:n = b:c **وهذا يعنى أن** m:n = g:k **وهذا يؤدي إلى** mk = ng (ab)(cd) = (ac)(bd)..

ومن قضية1 استنتج أنه عندما تكون d=1 **بالتعويض في** (ab)(cd)=(ac)(bd) **نصل إلى** (ab) c =(ac) b **تجميعية الضرب..**

قضية2 : إن حاصل ضرب العدد $\overline{AB}$ **بأي عدد يساوي حاصل ضرب** $\overline{AC}$ **بذلك العدد زيادة على حاصل ضرب** $\overline{CB}$ **بذلك العدد نفسه..أي** (a+b) m = am + bm..

برهن السموأل باستخدام القضيتين السابقتين أن:

" كل عدد يقسم بقسمين فإن مربع العدد المقسوم مساوٍ لمربع مربع كل واحد من القسمين وضرب كل واحد من القسمين في مكعب الآخر أربع مرات وضرب مربع أحدهما في مربع الآخر ست مرات.. مثاله: أن عدد اب قسم بقسمين، وهما اجـ ب جـ فإن مربع مربع اب مساوٍ لمربع مربع اجـ ومربع مربع ب جـ وضرب اجفي مكعب ب جـ أربع مرات وضرب ب جـ في مكعب اجأربع مرات وضرب مربع اجومربع ب جـ ست مرات.." (مرفق البرهان)

ويستمر السموأل بهذه الكيفية في الإثبات (الاستقراء الرياضي) لإثبات المفكوك النوني لذي الحدين..

وبرهن السموأل باستخدام الاستقراء الرياضي أن $(ab)^n = (a^n)(b^n)$ **بدأ الإثبات في حالة** n=2 :

$$(ab)^2 = (ab)(ab)$$
$$= (aa)(bb)$$
$$= (a^2)(b^2)$$

ثم أثبتها في حالة n=4, n=3 **وهكذا..**

من دراستنا السابقة رأينا كيف أن مشروع الجبريين الحسابيين يندرج مباشرة تحت سمة التوسيع: توسيع مجال تطبيق العمليات الحسابية.. وليست النتائج الحاصلة بواسطة هؤلاء الرياضيين مهمة بحد ذاتها فقط.. بل لكونها سمحت ببداية أخرى جديدة للجبر. كان يندرج أيضًا مشروع الجبريين الحسابيين تحت سمة الانتظام: تنظيم دراسة المعادلات وإعداد النظرية الخاصة بها.. مثلا تنظيم دراسة المعادلات التكعيبية وإعداد النظرية الخاصة بها.. وهي الدراسة التي قام بها العالم عمر الخيام فقد كتب في مؤلفه الجبري:

".. وإن فيها (أي صناعة الجبر والمقابلة) أصنافًا يحتاج فيها إلى أصناف من المقدمات معتاصة جدًا متعذر حلها على أكثر الناظرين فيها.. أما المتقدمون فلم يصل إلينا منهم كلام فيها.. لعلهم لم يتفطنوا لها بعد الطلب والنظر أو لم يضطر البحث إياهم إلى النظر فيها أو لم ينقل إلى لساننا كلامهم فيها.. وأما المتأخرون فقد عنَّ للماهاني منهم تحليل المقدمة التي استعملها أرشميدس مسلمة في الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتابه في الكرة والاسطوانة، بالجبر، فتؤدي إلى كعاب وأموال وأعداد متعادلة فلم يتفق له حلها بعد أن فكر فيها مليا، فجزم القضاء بأنه ممتنع حتى نبغ أبو جعفر الخازن وحلها بالقطوع المخروطية.. ثم افتقر بعده جماعة من المهندسين إلى عدة أصناف منها. فبعضهم حل البعض.. وليس لواحد منهم في تعديد أصنافها وتحصيل أنواع كل صنف منها والبرهان عليها كلام يعتدّ به إلا صنفين سأذكرهما. فإني دومًا لم أزل، كنت شديد الحرص على تحقيق جميع أصنافها وتمييز الممكن من الممتنع في أنواع كل صنف ببراهين.."

في هذا النص المهم بالنسبة إلى تاريخ الجبر يؤكد الخيام إذن:

أنه لم يصل من اليونانيين أي شيء يتعلق بنظرية المعادلات التكعيبية وأنه إذا كان أرخميدس قد طرح مسألة هندسية بالإمكان إرجاعها إلى معادلة تكعيبية فلا هو ولا شارحوه استطاعوا بالمقابل صياغة هذه المسألة بطريقة جبرية، إذ إن هذه المهمة تعود إلى الماهاني كما أن حلها يجب أن ينسب إلى الخازن.. لكن لا الماهاني ولا الخازن ولا سابقوهما ولا معاصروهما حاولوا إعداد نظرية فعلية للمعادلات التكعيبية.. ويؤكد الخيام أنه علينا التمييز ليس فقط بين مسألة هندسية يمكن إرجاعها إلى معادلة تكعيبية وترجمتها جبريًا.. بل بين حل هذه أو تلك من المسائل وإعداد نظرية للمعادلات التكعيبية..

سعي الخيام لإيجاد حل للمعادلات تكعيبية بطريقة منهجية وسعي لاحقه العالم شرف الدين الطوسي شكل بداية أخرى للجبر.. الهندسة الجبرية..

نجد في مؤلف الخيام ومؤلف الطوسي المثال التالي:

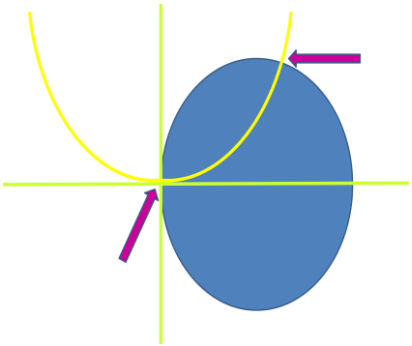
الطريقة المتبعة لحل: $x^3 + ax = b$ تعود إلى حل المعادلتين التاليتين في آنٍ معًا:

معادلة الدائرة مركزها (b/2a,0) ونصف قطرها (b/2a)

$$(x-\frac{b}{2a})^2+y^2=(\frac{b}{2a})^2$$

$$x^2=\sqrt{a}\,y$$

ومعادلة قطع مكافئ



حل المعادلتين في آنٍ واحد يعطي المعادلة..

$$x^4+ax^2-bx=0$$
$$x(x^3+ax-b)=0$$
$$x=0,\quad x^3+ax-b=0$$

أي حل صفري وحل المعادلة التكعيبية..

أدرك الطوسي أهمية المميز في مناقشة المعادلات التكعيبية.. فلكي يفترض وجود الجذور الموجبة في المعادلة:

$$x^3+\ a\ =\ bx,\qquad a,b>0$$

لاحظ أولا أن كل حل (موجب) لهذه المعادلة يجب أن يكون أصغر أو مساويا لـ $b^{\frac{1}{2}}$ **.. لأنه إذا كان** x_0 **جذرا نحصل على:**

$$x_0^3+a=bx_0$$
$$x_0^3\le bx_0$$
$$x_0^2\le b$$

كما يجب أن يحقق الجذر x_0 **المعادلة** $bx-x^3=a$ **يفتش الطوسي عن القيمة التي تبلغ بها** $y=bx-x^3$ **حدها الأقصى.. نوجد النقاط الحرجة ونختبرها..**

$$y' = b - 3x^2$$
$$y' = 0$$
$$x = \sqrt{\frac{b}{3}}$$

إذا الحد الأقصى هو..

$$\max y = 2(\frac{b}{3})^{3/2}$$

الآن:

$$y = bx - 3x^2 = a$$
$$\max y = 2(\frac{b}{3})^{3/2}$$
$$\Rightarrow y \le \max y$$
$$\Rightarrow a \le 2(\frac{b}{3})^{3/2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{b^3}{27} - \frac{a^2}{4} \ge 0$$

إذن هناك جذر موجب إذا وفقط إذا كان:

$$D = \frac{b^3}{27} - \frac{a^2}{4} \ge 0$$

وهكذا أثبت الطوسي المميز وأعده جبريًا لدراسة المعادلة التكعيبية..