الباب السادس
مقدمة في الإحتمالات والتوزيعات الإحتمالية

Chapter 6
Introduction to Probability & Probability Distribution

6 – 2 تعاريف اساسية

6 – 2 – 1 التجربة العشوائية

التجربة العشوائية (Random Experiment)
هي أي إجراء نعلم مسبقا جميع النواتج الممكنة له وان كنا لا نستطيع أن نتنبأ بأي من هذه النتائج سيتحقق فعلا. حيث من الواضح أننا لا نستطيع أن نتنبأ بنتيجة التجربة العشوائية إلا إننا نستطيع حساب احتمال ظهور أي نتيجة وذلك باستخدام الاحتمالات.

6 – 2 تعاريف اساسية

6 – 2 – 2 فراغ العينة (Sample Space)

هو المجموعة المكونة من النتائج الممكنة من تجربة عشوائية ويرمز له بالرمز (S).

ويُطلق عليه لفظ الحدث الشامل فكل نتيجة على حده تُسمى عنصر والفراغ يشمل جميع العناصر. كما يُطلق عليه أيضاً لفظ الحالات الممكنة (Possible Cases) لأنه يمثل الحالات التي من الممكن حدوثها نتيجة لإجراء تجربة عشوائية معينة.

مثال (6 – 1) صفحة (176)

عند إلقاء قطعة نقود متوازنة مرة واحدة فما هو فراغ العينة؟

الحل:

نجد أن النتائج الممكنة أو فراغ العينة لهذه التجربة هي:

صورة: وسنرمز لها بالرمز H ⟵ 

كتابـــة: وسنرمز لها بالرمز T ⟵ 

فإن مجموعة النتائج لهذه التجربة أي فراغ العينة لهذه التجربة هو: $S=\{H,T\}$

مثال (6 – 2) صفحة (177)

عند إلقاء قطعتي نقود مرة واحدة (أو قطعة نقود واحدة مرتين) ما هو فراغ العينة؟

الحل:

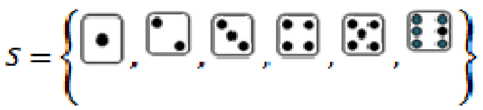
مجموعة النتائج لهذه التجربة أي فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

مثال (6 – 3) صفحة (177)

عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة، ما هو فراغ العينة؟

الحل:



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

اختاري الإجابة الصحيحة:

1) إلقاء قطعة نقود وزهرة نرد مرة واحدة مثال على:

أ. تجربة عشوائية   ب. حادثة   ج. فراغ عينة   د. تجربة غير عشوائية

2) إذا تم إلقاء زهرة نرد مرة واحدة فإن:

أ. 24   ب. 2   ج. 6   د. 12

3) احتمال ظهور عدد زوجي:

أ. 0,75   ب. 0,5   ج. 0,25   د. 0,1

فراغ العينة (Sample Space)

المحدود (Finite)
هو الفراغ الذي يحتوي على عدد محدود من العناصر

اللانهائي (Infinite)
هو الفراغ الذي يحتوي على عدد لا نهائي من العناصر

قابل للعد (Countable)
مثل:
إلقاء قطعة نرد حتى يظهر الوجه


غير قابل للعد (Uncountable)
مثل:
اختبار مصباح كهربائي لمعرفة عمره

3-2-6 الحادثة (Event)

هي مجموعة جزئية من فراغ العينة .

ويقال أن الحادثة قد وقعت إذا ظهرت أحد عناصرها عند إجراء التجربة .

أنواع الحوادث منها :

1. الحادثة البسيطة (Simple Event)

هي الحادثة التي تتكون من عنصر واحد من عناصر فراغ العينة .

الحادثة المركبة (Composite Event)

هي الحادثة التي تحتوي على أكثر من عنصر من عناصر فراغ العينة .

مثال (6 – 4) صفحة (178)

عند إلقاء قطعتي نقود مرة واحدة، حدد ما إذا كانت الحوادث الآتية حوادث بسيطة أم لا، إذا علمت أن فراغ العينة هو.

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

الحادثة	وصفها	نوع الحادثة
$A_1 = \{TT\}$	حادثة تمثل ظهور كتابتين	حادثة بسيطة
$A_2 = \{HH\}$	حادثة تمثل ظهور صورتين	حادثة بسيطة
$A_3 = \{HH, TT\}$	حادثة تمثل ظهور وجهين متشابهين	حادثة مركبة
$A_4 = \{HH, HT, TH\}$	حادثة تمثل ظهور صورة واحدة على الأقل	حادثة مركبة

2. الحادثة المؤكدة (Sure Event)

هي الحادثة التي لابد من وقوعها فمثلاً عند إلقاء عملة فإن فراغ العينة حادثة مؤكدة لأنها مجموعة جزئية من نفسها أي أن $S \subseteq S$

3.الحادثة المستحيلة (Imposable Event)

عندما لايكون للتجربة أي نواتج متعلقة بالحادثة المذكورة ويرمز للأحداث المستحيلة بالرمز Φ

مثال (6 – 5) صفحة (179)

عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة،
فإن الحادثة المؤكدة هي ظهور أي وجه من ⚀ إلى ⚅

مثال (6 – 6) صفحة (179)

عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة، فإن المثال على الحادثة المستحيلة هو ظهور عدد فردي وعدد زوجي في آن واحد و ظهور الرقم سبعة($\varnothing$).

4. الحوادث المتماثلة (Equally Likely Event)

هي الحوادث التي يكون لها نفس فرصة الحدوث

مثال (6-7) صفحة (179)

عند إلقاء قطعة نقود متزنة مرة واحدة فإن حادثة متماثلة لان فرصه ظهور الكتابة تماثل فرص ظهور الصورة
.

5.الأحداث المتنافية (المانعة) بالتبادل (Mutually Exclusive Events)

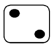
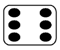
إذا كان هناك حدثان AوB، وكان وقوع الحادثتين معاً حدثاً مستحيلاً وهذا يعني أن الحدثين لا يمكن أن يقعا معاً أو وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر فإنه يُقال أن A, B حدثان مانعان أو متنافيان بالتبادل.

مثال (8-6) صفحة (180)

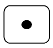
تمثل الأحداث التالية أحداث مانعة:

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة فإن حدث ظهور الكتابة يمنع حدث ظهور الصورة.
- عند إلقاء زهرة نرد متزنة بطريقة غير متحيزة مرة واحدة فإن ظهور أحد الأوجه يمنع ظهور الأوجه الأخرى.

إذا اعتبرنا أن الحدث A يمثل الوجوه الزوجية، أي:

A={  ,  ,  }

والحدث B يمثل الوجوه الفردية، أي:

B={  ,  ,  }

فإن الحدثين يعتبران مانعان لبعضهما بالتبادل

6. الاحداث المستقلة (Independent Events)

لو لدينا حادثان وكان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الاخر فيقال أن الحدثين مستقلان ، كذلك لو أن هناك أكثر من حدثين لا يؤثر ولايتأثر أحدهم بالاحداث الاخرى فيقال أن تلك الاحداث مستقلة .

مثال (9-6) صفحة (180)

عند إلقاء قطعتي نرد فإن ظهور رقم ما على سطح الزهرة الأولى يعتبر حادثة مستقلة لأنه لا يؤثر ولا يتأثر بما ظهر على القطعة الثانية. وينطبق إذا كان أكثر من قطعتين نرد.

اختاري الإجابة الصحيحة:

1) إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة ، فإن حادثة ظهور رقم فردي ورقم 4:

أ. مستقلة　　ب.مؤكدة　　ج.مستحيلة　　د.مانعـــة

2) إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة ، فإن حادثة ظهورعدد فردي وأكبر من 2 :

أ. مستحيلة　　ب.غير مانعـــة　　ج. مستقلة　　د.مؤكدة

3)عند سحب ورقة من أوراق اللعب ،فإن حادثة ظهور ورقة تحمل صورة ورقم :

أ.مؤكدة　　ب .مستقلة　　ج.مستحيلة　　د.مانعـــة

4) عند سحب ورقة من أوراق اللعب ،فإن حادثة ظهور ورقة تحمل ولد أسود:

أ. مستقلة　　ب.مؤكدة　　ج.مستحيلة　　د.مانعـــة

طرق العد (التوافيق)

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار (x) من الاشياء من بين (n) من هذه الاشياء (الترتيب غير مهم) هو :

$$\binom{n}{x} = C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

مثال (6-10) صفحة (181)

بكم طريقة يمكن اختيار رجلين من بين أربع رجال ؟

الحل :

X=2 n= 4

$$\binom{4}{2} = C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

مثال(6-11)صفحة (181)

أعلنت احدى الشركات عن توفر ثلاث وظائف شاغرة
للرجــال ووظيفــتين للنســـاء ، بكم طريقــة
يمكــن الاختيار اذا كان عدد المتقدمين ست رجال
وخمس نساء ؟

الحل :

عدد طرق اختيار الرجال : $\binom{6}{3} = C_3^6 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$

عدد طرق اختيار النساء : $\binom{5}{2} = C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$

6 – 3 تعريف الاحتمال

يوجد للاحتمال عدة مفاهيم أهمها التعريف القديم(الكلاسيكي) والتجريبي والرياضي.

6 – 3 – 1 التعريف القديم (الكلاسيكي) للاحتمال

(Classical Definition of Probability)

إذا كان عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها نتائج تجربة ما هو n طريقة وكانت هذه النتائج لها نفس فرصة الظهور وكان من بينها m طريقة تظهر بها حادثة ما. فإنه يقال إن احتمال وقوع الحادثة هو ← $\frac{m}{n}$

وإذا رمزنا للحادثة بالرمز A فإن $P(A)$ احتمال وقوع الحادثة A عبارة عن عدد الحالات المواتية للحادثة A مقسوماً على عدد الحالات الكلية أي أن ← $m \leq n$

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

مثال(6-12) صفحة (182)

إذا كانت لديك عشر بطاقات مرقمة من الرقم (1) حتى (10) موضوعة على طاولة بشكل عشوائي ومقلوبة، ثم سحبت إحدى هذه البطاقات

ما احتمال الحصول على بطاقة تحمل الرقم (4)؟

ما احتمال الحصول على بطاقة تحمل رقم يقبل القسمة على (3)؟

الحل:

أ.فراغ العينة في هذه الحالة هي الأرقام من (1) حتى (10)، أي أن لدينا فراغ عينة ذو عشر عناصر [$n = 10$]، بالتالي احتمال الحصول على بطاقة تحمل الرقم (4) (ولنرمز لهذه الحادثة بالرمز A) هو:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10} = 0.1$$

الحصول على بطاقة تحمل رقم يقبل القسمة على (3) تكون عند ظهور أحد ثلاثة أرقام 3 أو 6 أو 9 أي أن $m = 3$، فإذا رمزنا لهذه الحادثة بالرمز B فإن :

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0.3$$

مثال (6 – 13) صفحة (183)

ألقيت زهرة نرد متزنة مرة واحدة فما احتمال ظهور:

أ. عدد فردي ؟

ب. عدد زوجي ؟

ج. عدد أقل من الوجه ⚄ ؟

د. عدد أكبر من الوجه ⚅ ؟

الحـــل:

علمنا مما سبق أن فراغ العينة لإلقاء زهرة النرد هو: $S=$ {⚅, ⚄, ⚃, ⚂, ⚁, ⚀}

من الملاحظ أن الطرق التي يمكن أن يظهر بها الوجه العلوي هو $n = 6$، ولنعتبر أن:

A: يمثل حدث ظهور عدد فردي.

B: يمثل حدث ظهور عدد زوجي.

C: يمثل حدث ظهور عدد أقل من الوجه ⚄

D: يمثل حدث ظهور عدد أكبر من الوجه ⚅ .

أ. عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على الوجه العلوي عدداً فردياً (الحادثة A) هو $m= 3$، وبهذا يكون احتمال ظهور عدد فردي يساوي:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

ب. عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على الوجه العلوي عدد زوجي (الحادثة B) هو $m = 3$،

وبهذا يكون احتمال ظهور عدد زوجي يساوي:

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

ج. عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على الوجه العلوي عدد أقل من الوجه ⚄ ، وهو أن

يكون الوجه العلوي ⚀ أو ⚁ أو ⚂ أو ⚃ ،وبهذا يكون احتمال الحادثة C هو:

$$P(C)=\frac{m}{n}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

د. عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على الوجه العلوي عدداً أكبر من الوجه ⚅ يساوي $\varnothing$ ، لأن الحادثة مستحيلة ، وبهذا يكون احتمال الحادثة D هو:

$$P(D)=\frac{m}{n}=\frac{0}{6}=0$$

مثال (6 – 14) صفحة (184)

ألقيت قطعتا نقود متزنتان مرة واحدة. فما احتمال:

أ- ظهور صورة واحدة على السطح العلوي؟

ب- ظهور صورة واحدة على الأقل؟

ج- ظهور صورة واحدة على الاكثر؟

الحــل:

كما أسلفنا سابقاً، فإن فراغ العينة في هذه الحالة، $S=\{HH,HT,TH,TT\}$
أي أن عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها الوجهان هي $n = 4$

(أ) عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على السطح العلوي صورة واحدة $m = 2$، فإذا كانت A هي حادثة ظهور صورة واحدة فإن:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(ب) عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على السطح العلوي صورة واحدة على الأقل هو ة $m=3$ (صورة أو صورتين)، فإذا كانت B هي حادثة ظهور صورة واحدة على الأقل فإن:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$$

(ج) عدد الطرق التي يمكن أن يظهر بها على السطح العلوي صورة واحدة على الاكثر $m = 3$، فإذا كانت C هي حادثة ظهور صورة واحدة على الاكثر (صورة واحدة أو عدم ظهور صورة) فإن:

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$$

ملاحظة هامة

✓ من الملاحظ والذي يمكن أن نستنتجه أن احتمال أي حادثة A لا يزيد عن الواحد الصحيح عندما يكون الحدث مؤكداً ولا يقل عن الصفر عندما يكون الحدث مستحيلاً كما أن النسبة $\frac{m}{n}$ هي خارج قسمة عددين غير سالبين هما m, n بحيث $m \leq n$ وعلى ذلك فإن:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

مسلمات نظرية الاحتمالات

1. يرافق كل حادثة A عدد معين $P(A)$ يسمى احتمال A ويحقق: $P(A) \geq 0$
2. احتمال وقوع حادثة مؤكدة يساوي واحد أي أن $P(S) = 1$ و $P(A) \leq 1$.
3. احتمال وقوع حادثة مستحيلة يساوي صفر $P(\phi) = 0$

اختاري الإجابة الصحيحة :

1) بكم طريقة يمكن اختيار 2 وظيفة نسائية اذا كان عدد المتقدمات 6 :

أ.10 ب. 120 ج. 15 د. 30

2) تعتبر حادثة ظهور عدد يقبل القسمة على 5 عند إلقاء زهرة نرد متزنة مره واحده من الحوادث :

أ.بسيطة ب.مركبة ج. مؤكدة د. أ+ب

3) صندوق به 7 مصابيح جيدة ،3 تالفة ماهو احتمال مصباح تالف:

أ. $\frac{3}{10}$ ب. $\frac{7}{10}$ ج. $\frac{3}{7}$ د. $\frac{7}{3}$

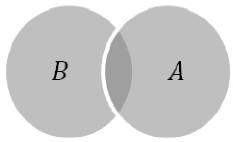
نظرية الأحداث المكملة :

إذا كانت $\bar{A}$ هي مكملة المجموعة A، فإن:

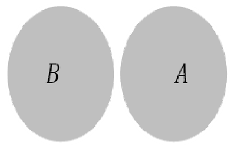
$$P\left(\bar{A}\right)=1-P\left(A\right)$$

مجموع احتمال حدوث حادثة واحتمال عدم حدوثها يساوي الواحد

1-4-6 الأحداث المانعة غير المانعة



حدثان غير مانعان



حدثان مانعان

لحساب احتمال وقوع حدثان مانعان نستخدم القانون التالي:

$$P(A\,or\,B) = P(A) + P(B)$$

لحساب احتمال وقوع حدثان غير مانعان نستخدم القانون التالي:

$$P(A\,or\,B) = P(A) + P(B) - P(A\,and\,B)$$

مثال (6-17) صفحة (189)

وجُد في أحد نوادي الرياضة القريبة من الجامعة 50طالباً من
جامعة الملك عبد العزيز منهم 20طالباً من كلية الاقتصاد والإدارة
و 25طالباً من كلية الآداب والباقي من كليات أخرى .
أختير منهم طالباً عشوائياً أوجد الاحتمالات الآتية:

احتمال أن يكون الطالب من كلية الاقتصاد والإدارة؟
احتمال أن يكون الطالب من كلية الآداب؟
احتمال أن يكون الطالب من كلية الاقتصاد والإدارة أومن كلية
الآداب؟
احتمال أن يكون الطالب من كلية أخرى؟

ليكن :

A يمثل طالب من كلية الاقتصاد والإدارة

B يمثل طالب من كلية الآداب

أ-احتمال أن يكون الطالب من كلية الاقتصاد والإدارة

$$P(A) = \frac{20}{50} = \mathbf{0.4}$$

ب-احتمال أن يكون الطالب من كلية الآداب

$$P(B) = \frac{25}{50} = \mathbf{0.5}$$

ج-احتمال أن يكون الطالب من كلية الاقتصاد والإدارة أومن كلية الآداب (من الملاحظ أن الحدثين متنافيين).

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) = 0.4 + 0.5 = \mathbf{0.9}$$

د-احتمال أن يكون الطالب من كلية أخرى.

$$1 - P(A \text{ or } B) = 1 - 0.9 = \mathbf{0.1}$$

أمثلة محلولة في الاحتمالات
صفحة (195)

(1-7-6)

سُحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة) فما احتمال أن تحمل الرقم 5 أو صورة ؟

الحل:

بفرض أن A ترمز للرقم 5 و B ترمز للصورة فيكون:

$$P(A)=\frac{4}{52},\ P(B)=\frac{12}{52},$$

وحيث أن الحدثين متنافيان فإن الاحتمال المطلوب:

$$P(A \text{ or } B)=P(A)+P(B)=\frac{16}{52}$$

(3-7-6)

يُشترط للالتحاق ببرنامج الدكتوراه في إحدى الجامعات شرط نجاح الطالب في اختبارين: الأول (A) TOEFL والثاني GRE (B) فإذا تقدم لهذا البرنامج 100 طالب، نجح في الاختبار الأول 80 طالباً وفي الاختبار الثاني 60 طالباً، فإذا أعلنت الجامعة قبول 50 طالباً. أختير طالباً عشوائياً أوجد:

- احتمال نجاح الطالب في الاختبار الأول؟
- احتمال عدم قبول الطالب؟
- احتمال نجاح الطالب في أحد الاختبارين؟

الحل:

احتمال نجاح الطالب في الاختبار الأول هو $P(A) = 0.8$.

احتمال عدم قبول الطالب هو $1-P(A \text{ and } B)=1-0.5=\mathbf{0.5}$

احتمال نجاح الطالب في أحد الاختبارين

$$P(A \text{ or } B)=P(A)+P(B)-P(A \text{ and } B)=0.8+0.6-0.5=\mathbf{0.9}$$

(5-7-6)

في بحث لدراسة العلاقة بين الكلية التي تنتمي إليها الطالبة ومدى حفظها للقرآن الكريم، اختيرت عينه عشوائية من طالبات جامعة الملك عبد العزيز فكانت لدينا البيانات التالية:

الكلية المستوى	الآداب (m)	علوم (s)	اقتصاد (c)	المجموع
ممتاز (e)	60	50	70	180
جيد (g)	25	30	20	75
ضعيف (b)	15	20	10	45
المجموع	100	100	100	300

1) اُختيرت طالبة عشوائياً فما احتمال أن تكون:

أ .من كلية الآداب؟

ب .ممتازة ؟

ت .غير ضعيفة؟

ث. من غير كلية العلوم ؟

ج. من كلية العلوم وممتازة؟

ح. من كلية العلوم أو ممتازة؟

الحل:

أ. احتمال أن تكون من كلية الآداب هو $P(m)=\frac{100}{300}=\mathbf{\frac{1}{3}}$

ب. احتمال أن تكون ممتازة هو $P(e)=\frac{180}{300}=\mathbf{0.6}$

ت. احتمال ألا تكون ضعيفة = 1- احتمال أن تكون ضعيفة

$$1-P(b)=1-\frac{45}{300}=\frac{255}{300}=\mathbf{0.85}$$

طريقة أخرى: احتمال ألا تكون ضعيفة = احتمال تكون ممتازة + احتمال أن تكون جيدة =

$$\frac{180}{300}+\frac{75}{300}=\mathbf{0.85}$$

ث. احتمال ألا تكون من كلية العلوم = $1-P(s)=\frac{2}{3}$

طريقة أخرى: احتمال ألا تكون من كلية العلوم = احتمال أن تكون من كلية الآداب + احتمال أن تكون من كلية الاقتصاد = $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$ (حدثين متنافيين).

ج. أن تكون من كلية العلوم وممتازة = $\frac{50}{300}=0.16$

ح. أن تكون من كلية العلوم أو ممتازة

$$P(s \text{ or } e)=P(s)+P(e)-(s \text{ and } e)=0.33+0.6-0.16=\mathbf{0.77}$$

اختاري الإجابة الصحيحة:

1) إذا كان لدينا 8 مصابيح جيدة من بين 10 مصابيح فما احتمال :

(أ) أن يكون المصباح جيد ؟

أ. 0,2 ب. 0,8 ج.صفر د.1

(ب) أن يكون المصباح جيد أو غير جيد ؟

أ. 1 ب. صفر ج. 0,2 د. 0,8

(ج) أن يكون المصباح غير جيد ؟

أ. صفر ب. 0,8 ج.1 د.0,2

6 – 8 المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

6 – 8 – 1 مقدمة

يصاحب نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى **المتغير العشوائي**.

المتغير العشوائي (Random Variable) هو المقدار الذي يأخذ قيماً رقمية مختلفة والتي تعبر عن نتائج التجربة العشوائية.

فمثلاً عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة، التجربة هنا عشوائية ونتائجها هي:

نتائج التجربة						
X	1	2	3	4	5	6

وتنقسم المتغيرات العشوائية إلى:

المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع) Discrete Random Variable	المتغير العشوائي المستمر(المتصل) Continuous Random Variable
يقال أن المتغير العشوائي (*X*) متغير عشوائي منفصل إذا كان يأخذ قيماً تنتمي إلى مجموعة محدودة أو معدودة حتى ولو لم تكن هذه القيم قيماً صحيحة . من الأمثلة على هذا المتغير: • عدد الأسهم المخصصة للفرد المكتتب في شركة مساهمة. • عدد الحوادث الشهرية على الطرق السريعة.	يقال أن المتغير العشوائي (*X*) متغير عشوائي متصل إذا كان يأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية في مدى تغيره، أو كان ينتمي إلى مجموعة غير محدودة أو معدودة. من الأمثلة على هذا المتغير: • أسعار المنتجات المختلفة. • أجور العمال بإحدى الشركات

6 – 8 المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي :

عبارة عن دالة توضح احتمالات معينة لقيم المتغير العشوائي المختلفة، وهذه الدالة يعبر عنها بجدول أو صيغة رياضية تبين قيم المتغير والاحتمالات المقابلة لكل منها. فمثلاً في تجربة إلقاء زهرة الطاولة نجد أن:

نتائج التجربة						
X	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

وتنقسم التوزيعات الاحتمالية إلى نوعين أساسيين هما:

1 / توزيعات احتمالية منفصلة.

2 / توزيعات احتمالية متصلة.

6 – 8 – 2 التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

باعتبار أن X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $X_1, X_2, ..., X_n$ ،
ولكل قيمة احتمالات معينة كالتالي: $P(X_1), P(X_2), P(X_3), ..., P(X_n)$
يقال أن للمتغير العشوائي المنفصل X توزيعاً احتمالياً منفصلاً
P(x) إذا حقق هذا التوزيع الشروط التالية:

(1) $P(x) \geq 0$ ← لجميع قيم X

(2) $\sum P(x) = 1$ ← أي أن مجموع الإحتمالات يساوي الواحد

خصائص أساسية للتوزيع الاحتمالى المنفصل

1/ توقع التوزيع (التوقع الرياضي أو متوسط التوزيع):

$$E(X) = \mu = \sum x P(x)$$

2/ تباين التوزيع:

$$\mathrm{var}(X) = \sigma^2 = \sum x^2 P(x) - \mu^2$$

3/ الإنحراف المعياري:

$$\sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال (6 – 22) صفحة (201)

ألقيت ثلاث قطع من العملة المعدنية المتوازنة. أجب عما يلي:

أ / ما هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الصور التي تظهر على الوجه العلوي؟

ب / أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الصور التي تظهر علي السطح العلوي؟

ج / أوجد خصائص توزيع عدد الصور التي تظهر علي السطح العلوي؟

الحــــــل:

فراغ العينة في هذه الحالة:

S = {(T,T,T), (T,T,H), (T,H,T), (H,T,T), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H), (H,H,H)}

أ/ نفرض أن X **تمثل عدد الصور التي تظهر علي السطح العلوي** والذي يمثل المتغير العشوائي والذي يخصص أعداداً حقيقية تناظر عناصر فراغ العينة كالآتي:

X(T,T,T)=0, X(T,T,H)=1, X(T,H,T)=1, X(H,T,T)=1, X(H,H,T)=2, X(H,T,H)=2, X(T,H,H)=2, X(H,H,H)=3.

وعلي ذلك فإن فراغ العينة يرافقه المتغير العشوائي X = {0, 1, 2, 3}. وهذا يعني أن الدالة X وهي عدد الصور التي تظهر علي السطح العلوي متغير عشوائي يأخذ القيم 0,1,2,3 ويتضح أن 0 تعني حالة عدم ظهور الصورة و 1 يعني ظهور الصورة مرة واحدة بينما 2 تعني ظهور الصورة مرتين كذلك 3 تعني ظهور الصورة ثلاث مرات وبالتالي فإن:

P(X = 0) = P{(T,T,T)}
P(X = 1) = P{(T,T,H), (T,H,T), (H,T,T)}
P(X = 2) = P{(H,H,T), (H,T,H), (T,H,H)}
P(X = 3) = P{(H,H,H)}

ب / التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة:

$$P(X=0)=P(T\,T\,T)=\frac{n(TTT)}{n(S)}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=P(H\,T\,T)+P(T\,H\,T)+P(T\,T\,H)=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=P(H\,H\,T)+P(H\,T\,H)+P(T\,H\,H)=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=P(H\,H\,H)=\frac{1}{8}$$

ويمكن وضع تلك النتائج في جدول كالآتي:

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X

X	0	1	2	3	
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\sum 1$

لاحظي: أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد وأن أي احتمال اكبر من الصفر وأقل من الواحد.

$$0 < P(X) < 1$$
$$\sum P(X) = 1$$

ج / خصائص التوزيع:

X	0	1	2	3	$\sum$
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{8}=1$
$x \cdot P(x)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$
$x^2 \cdot P(x)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8}$

$$\mu = E(X) = \sum x \cdot P(x) = \frac{12}{8} = \mathbf{1.5}$$

$$\sigma^2 = \operatorname{var}(X) = \sum x^2 \cdot P(x) - \mu^2 = \frac{24}{8} - (1.5)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

$$\sigma = \sqrt{\operatorname{var}(X)} = \sqrt{0.75} = 0.87$$

مثال (6-23) صفحة (202)

إذا كان التوزيع الاحتمالي المنفصل لمتغير X هو كالتالي:

X	1	2	3	4
$P(x)$	k	0.2	0.6	0.1

أ- ما هي قيمة الثابت (k) المناسبة؟

ب- أوجد متوسط وتباين التوزيع؟

الحل:

أ- حيث أن مجموع الاحتمالات لابد وأن يساوي الواحد، لذا:

$$\sum P(x) = 1$$
$$\Rightarrow k + 0.2 + 0.6 + 0.1 = 1$$
$$\Rightarrow k + 0.9 = 1$$
$$\Rightarrow k = 1 - 0.9 = \mathbf{0.1}$$

ب- يمكن حساب متوسط وتباين التوزيع كالتالي:

X	1	2	3	4	$\sum$
$P(x)$	0.1	0.2	0.6	0.1	1
$x \cdot P(x)$	0.1	0.4	1.8	0.4	2.7
$x^2 \cdot P(x)$	0.1	0.8	5.4	1.6	7.9

$$\mu = E(x) = \sum x \cdot P(x) = 0.1 + 0.4 + 1.8 + 0.4 = 2.7$$

$$\sigma^2 = \operatorname{var}(x) = \sum x^2 \cdot P(x) - \mu^2 = 7.9 - (2.7)^2 = 7.9 - 7.29 = 0.61$$

بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة :

توزيع ذو الحدين

اذا كان لدينا تجربة ما تتكرر (n) مرة ، وكان احتمال ظهور حدث ما (النجاح) هو p،واحتمال عدم ظهور الحدث (الفشل) هو q، فان احتمال ظهور الحدث (x) n مرة من بين التكرار يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية

$$C_x^n p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

مواصفات توزيع ذي الحدين :

توزيع منفصل يستخدم في حالة الاحداث المستقلة ويتوقف على قيمة الاحتمال

$$\sum P(x) = \sum C_x^n p^x q^{n-x} = 1$$

حيث:

$$p + q = 1$$

خصائص توزيع ذي الحدين :

المتوسط $\mu = np$

التباين $\sigma^2 = npq$

الإنحراف المعياري $\sigma = \sqrt{npq}$

مثال (6-24) صفحة (203)

اذا كان احتمال ارتفاع مؤشر الاسهم هو (4 / 3) اختيرت 3 دول أوجدي :

التوزيع الاحتمالي لعدد الدول التي يرتفع مؤشر سوق أسهمها ؟

متوسط التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري ؟

احتمال ارتفاع مؤشر سوق الاسهم لدولتين على الاقل ؟

الحل :

$$n = 3 \ , \ p = \frac{3}{4} \ , \ q = 1 - p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

X الحدث : ارتفاع مؤشر سوق الاسهم

متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم 0 ، 1 ، 2، 3

ويتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x} = C_x^3 \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x} \quad x = 0,1,2,3$$

$$P(X=0) = P(0) = C_0^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$$

$$P(X=1) = P(1) = C_1^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{9}{64}$$

$$P(X=2) = P(2) = C_2^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 3 \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

$$P(X=3) = P(3) = C_3^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{27}{64} \times 1 = \frac{27}{64}$$

$$\sum P(x) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{64}{64} = 1$$

- متوسط التوزيع : $\mu = np = 3 \times \frac{3}{4} = 2.25$
- تباين التوزيع : $\sigma^2 = npq = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$
- انحرافه : $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{9}{16}} = 0.75$

- احتمال ارتفاع مؤشر السوق لدولتين على الاقل
- (X=2 or X=3)

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{54}{64}$$

اختاري الإجابة الصحيحة :

1)اوجدي القيمة المفقودة فى جدول التوزيع الاحتمالي الآتى:

x	0	1	2	3
P(x)	$\frac{1}{4}$	K	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

أ. $\frac{1}{2}$ ب. $\frac{1}{4}$ ج. $\frac{1}{8}$ د. $\frac{7}{6}$

2) الوسط الحسابي للتوزيع السابق :

أ. 0,25 ب. 0,125 ج. 1,125
د.1,50

اختاري الإجابة الصحيحة :

(3

(أ)عند إلقاء زهرة نرد 10 مرات ، اوجدي الوسط الحسابي لظهور الرقم 4 :

أ. 0,5 ب. 0,16 ج. 1,66 د.10

(ب)الإنحراف المعياري :

أ. 0,138 ب. 0,372 ج.1,66 د.0,138