A. Z. ALZAHRANI

الفصل الثالث: المتجهات Vectors

تنقسم الكميات الفيزيائية (سواءاً أساسية أو مشتقة) إلى نوعين أساسيين: كميات قياسية Scalar quantities وكميات متجهة Vector quantities

أولاً: الكميات القياسية Scalar Quantities

في هذا النوع من الكميات، كل ما يهمنا هو قيمتها (مقدارها) فقط. بمعنى آخر: هي الكميات التي لها مقدار magnitude وليس لها اتجاه direction

وبالتالي تستطيع وصفها بالمقدار فقط

ومن الأمثلة عليه: الطول length، المسافة distance، الزمن time، السرعة العددية speed، الكتلة mass

فعندما يقول لك صديقك أن طوله 160 سم، فأنت تفهم تذلك مباشرة دون الحاجة إلى معلومات إضافية!

ثانياً: الكميات المتجهة Vector Quantities

في هذا النوع من الكميات، يهمنا معرفة قيمتها (مقدارها) وكذلك اتجاهها. بمعنى آخر: هي الكميات التي لها مقدار magnitude و اتجاه direction

وبالتالي لا تستطيع وصفها بالمقدار فقط ولكن لابد من ذكر المقدار مع الاتجاه دوماً.

ومن الأمثلة عليها: الإزاحة displacement، السرعة المتجهة velocity، التسارع acceleration، القوة force

لاحظ هنا أن المسافة كمية قياسة بينما أن الأزاحة كمية متجهة

فعندما يقول لك صديقك أنه بذل قوة مقدارها 500 نيوتن لتحريك جسم ما، فأنت تفهم أن مقدار القوة التي بذلها، ولكن ستسأله قائلا: في أي اتجاه حركته؟! هل دفعت الجسم إلى اليمين أم اليسار أم اين؟!

كيف نعبر عن المتجهات How to express vectors؟!

هناك عدة طرق للتعبير عن المتجهات، ولعل أشهر الطرق وأيسرها استخدام متجهات الوحدة unit vectors وهي للدلالة على المحاور الكارتيزية Cartesian coordinates

هذه المتجهات هي **i** للدلالة على الاتجاه السيني ، **j** للدلالة على الاتجاه الصادي، **k** للدلالة على

A. Z. ALZAHRANI

الاتجاه العيني. وسميت بمتجهات الوحدة لأن قيمة أو مقدار كل واحد منها يساوى الواحد

ملحوظة: يرمز للمتجه بحرف يعلوه سهم $\vec{A}$ أو بخط أسود عريض **A** وتسمى هذه الدلالة vector notation

وبالتالي نستطيع أن نعبر عن المتجه كما يلي

$$\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

أو

$$\boldsymbol{A} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

حيث ان a_x تمثل قيمة المتجه في المحور السيني (مركبته السينية)، a_y تمثل قيمة المتجه في المحور الصادي (مركبته الصادية)، a_z تمثل قيمة المتجه في المحور العيني (مركبته العينية)

ولحساب قيمة هذا المتجه، نستخدم العلاقة

$$|A| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

ملاحظة: عندما يكون المتجه في مستوى، فإن للمتجه مركبتين فقط. فلو قلنا ان المتجه في المستوى xy فهذا يعني ان المركبة العينية تساوي صفر

متجه الوحدة Unit vector

لمتجه A فإن متجه الوحدة U يعرف بأنه المتجه مقسوم على مقداره، أي كالتالي

$$U = A/|A|$$

وبالتالي فإن U قيمته الوحدة واتجاهه نفس اتجاه A

العمليات الحسابية للمتجهات

أولاً: جمع وطرح المتجهات Addition and Subtraction of Vectors

لنفرض أن لدينا المتجهين التاليين

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

$B=B_xi + B_yj+ B_zk$

فإن حاصل جمع (أو طرح) المتجهين ماهو إلا جمع (أو طرح) المركبات المتماثلة، بمعنى أن

$A+B=(A_x+B_x)i+ (A_y+B_y)j+(A_z+B_z)k$

$A-B=(A_x-B_x)i+ (A_y-B_y)j+(A_z-B_z)k$

الناتج من عملية الجمع أو الطرح سيكون بكل تأكيد متجه

ثانياً: ضرب المتجهات Product of Vectors

هناك نوعان من الضرب: قياسي Scalar (dot) product **واتجاهي** vector (cross) product

النوع الأول: الضرب القياسي Scalar Product

يتضح من الاسم أن الناتج من هذه العملية عبارة عن عدد

لنفرض أن لدينا المتجهين التاليين

$A=A_xi + A_yj+ A_zk$

$B=B_xi + B_yj+ B_zk$

فإن حاصل الضرب القياسي سيكون بضرب المركبات المتماثلة ومن ثم جمعها، كالتالي

$A .B=A_xB_x+ A_yB_y+A_zB_z$

وله تعريف آخر عندما تعرف قيمة المتجهين A **و** B **والزاوية بينهما** Q **حيث أن**

$A .B=AB \cos Q$

ملاحظات

1- **عندما يكون المتجهان** A , B **متعامدين** perpendicular (**بمعنى ان الزاوية بينهما** Q=90) **فإن حاصل ضربهما القياسي يساوي صفر**

2- **الضرب القياسي عملية ابدالية** A.B=B.A

النوع الثاني: الضرب المتجهي Vector Product

A. Z. ALZAHRANI

يتضح من الاسم أن الناتج من هذه العملية عبارة عن متجه

لنفرض أن لدينا المتجهين التاليين

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

$$B = B_x i + B_y j + B_z k$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$A \times B = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}$$

كيف تتم هذه العملية؟!

أولاً: نغطي على العمود الأول ونضرب (طريقة المقص: الطرفين ناقص الوسطين) وبعدها نروح للحد الثاني حيث نغطي على العمود الثاني ونكمل بنفس الطريقة

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

وله تعريف آخر عندما يعرف مقدار المتجهين A و B والزاوية بينهما Q حيث أن

$$|A \times B| = AB \sin Q$$

<u>ملاحظات</u>

1- **عندما يكون المتجهان A , B متوازيين** parallel **(بمعنى ان الزاوية بينهما** Q=0**) فإن حاصل ضربهما الاتجاهي يساوي صفر**

2- **الضرب الاتجاهي ليس عملية ابدالية** $A \times B = -B \times A$

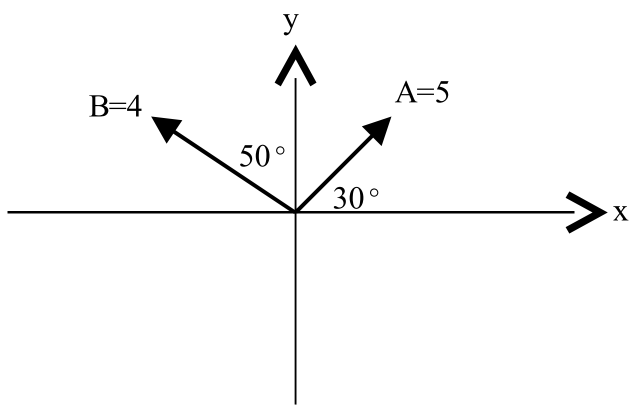
3- **المتجه الناتج عن الضرب الاتجاهي سيكون عموديا على كلي المتجهين، على سبيل المثال** $A \times B$ **سيكون عمودياً على كل من** A **و** B

A. Z. ALZAHRANI

EXAMPLES

(1)

Two vectors, |A|=5 (in first quarter) and makes an angle of 30 with positive x-axis, and |B|=4 (in second quarter) and makes an angle of 50 with positive y-axis, as shown in the figure, Find the resultant vector A+B and its magnitude |A+B|.



SOLUTION

أولاً نحلل المتجهات إلى مركباتها السينية والصادية

المتجه A يصنع الزاوية مع المحور السيني بالتالي فإن المركبة السينية ستكون

$A_x=|A|\ \cos Q=5\cos30=4.33$

بينما المركبة الصادية ستكون

$A_y=|A|\ \sin Q=5\sin30=2.50$

وبالتالي فإن المتجه سيكون كالتالي

$A= A_x i + A_y j = 4.33\ i + 2.50\ j$

بالنسبة للمتجه B نلاحظ انه يصنع الزاوية مع المحور الصادي وبالتالي ستكون مركبته السينية

$B_x=|B|\ \sin Q= 4\sin50=3.06$

ولكن المتجه يقع في الربع الثاني، حيث ان المحور السيني سالب والصادي موجب

لذا فإن المركبة السينية ستكون سالبة

B_x=-3.06

أما المركبة الصادية فهي

B_y=|B| cosQ= 4cos50 = 2.57

وبالتالي سيكون المتجه كالتالي

B= B_xi + B_yj = -3.06i + 2.57 j

عليه فإن المحصلة هي

A+B = (A_x+B_x)i + (A_y+B_y)j= (4.33 – 3.06)i + (2.50+2.57) j

A+B = 1.27i + 5.07j

أما المحصلة فتحسب كالتالي

$|A+B|=(1.27^2+5.07^2)^{0.5}=5.23$

(2)

Given that A=i-3j+2k. Find the angle A makes with each coordinate.

SOLUTION

من المهم لك أن تعلم ان الزاوية التي يصنعها المتجه مع أي محور تعطى بالعلاقات التالية

$\cos Q_x=A_x/|A|$

$\cos Q_y=A_y/|A|$

$\cos Q_z=A_z/|A|$

وعليه فإن

$A_x=1,\ A_y=-3,\ A_z=2$

$|A|=(1^2+(-3)^2+2^2)^{0.5}=3.74$

$Q_x=\cos^{-1}(1/3.74)=74.5^\circ$

$Q_y=\cos^{-1}(-3/3.74)=143.3^\circ$

Qz=cos-1(2/3.74)=57.7°

(3)

If A=2i-j-k and B=i-3j+k, find |A-3B| and A×B.

SOLUTION

أولا نوجد 3B

3B=3(i-3j+k)=3i-9j+3k

ومنها نجد ان

A-3B=(2-3)i +(-1-(-9))j + (-1-1)=-i +8j -2k

$|A-3B|=((1-)^2+(8)^2+(-2)^2)^{0.5}=8.31$

$A\times B=(A_yB_z-A_zB_y)i -(A_xB_z-A_zB_x)j + (A_xB_y-A_yB_x)k$

A×B=((-1)*1-(-1)*(-3))i – (2*1-(-1)*1)j + (2*(-3)-(-1)*1)k=-4i-3j-5k

(4)

You have A=5i+6j-3k and B=4i+3k. If A-2B-3C=0, Find the vector C.

SOLUTION

نجعل المجهول في طرف

A-2B-3C=0 → 3C=A-2B or C=1/3(A-2B)

2B=8i+6k

A-2B=(5-8)i+(6-0)j+(-3-6)k=-3i+6j-9k

C=1/3(A-2B) =1/3(-3i+6j-9k)= -i+2j-3k

(5)

You have A=3i+2j-4k and B=4i+3k. Find A.B and the angle between A and B.

SOLUTION

$A.B= A_xB_x+ A_yB_y+ A_zB_z$

الان نضرب كل مركبة بالمركبة المماثلة لها مع ملاحظة أن المركبة الصادية للمتجه B تساوي صفر

$A.B=3*4+2*0+(-4)*3=0$

بما أن ناتج الضرب القياسي يساوي صفر، فهذا يعني ان المتجهين متعامدان

أي أن الزاوية بينهما تساوي صفر

(6)

Find the angle between the vectors A=6i-j+5k and B=4i-3j+3k.

SOLUTION

نعلم أن الضرب القياسي لمتجهين يعطى بالعلاقة

$A.B=|A||B| \cos Q$

إذاً

$\cos Q=A.B/(|A||B|)$

حيث أن

$|A|=(6^2+(-1)^2+5^2)^{0.5}=7.87$

$|B|=(4^2+(-3)^2+3^2)^{0.5}=5.83$

معلوم أن

$A.B= A_xB_x+ A_yB_y+ A_zB_z$

$A.B = 6*4+(-1)(-3)+5*3=42$

منها نجد أن

$\cos Q=A.B/(|A||B|)=42/(7.87*5.83) = 0.92$

وبالتالي فإن الزاوية بين المتجهين تساوي

$Q=\cos^{-1}(0.92)=23.74°$

(7)

Given that A=4i-3j-xk where x is a constant. Find the value of x if A is perpendicular to B=i+2k

SOLUTION

A.B=4*1+(-3)*0+(-x)*2=4-2x

بما أن المتجهين متعامدان، إذا حاصل ضربهما القياسي يساوي صفر

A.B=0 ➔ $4 - 2x = 0$

إذاً

$2x = 4$

$\boldsymbol{x = 2}$

(8)

Given that A = 3i + 2j – k, find a unit vector C in the opposite direction to A.

SOLUTION

من السؤال نعلم أن متجه الوحدة C من المتجه A هو

C=A/|A|

$|A|=(3^2+2^2+(-1)^2)^{0.5}=3.74$

C=A/|A|=1/3.74(**3i + 2j – k)=0.8i + 0.53j - 0.28k**

ولكن هذا المتجه هو متجه الوحدة للمتجه A وفي نفس اتجاهه....والسؤال يريد متجه في عكس اتجاه A

والحل بسيط جداً، نضربه في -1 فيصبح

C= - 0.8i - 0.53j + 0.28k

(9)

For two vectors, A and B, |A + B|=5 units and |A - B|=3 units. What is the magnitude of vector A if the magnitude of B is 2

SOLUTION

من المعلوم أن محصلة الجمع تعطى بالعلاقة

$$|A+B|^2 = A^2 + 2A.B + B^2$$

ومحصلة الطرح تعطى بالعلاقة

$$|A-B|^2 = A^2 - 2A.B + B^2$$

بجمع المعادلتين السابقتين، نجد ان

$$|A+B|^2 + |A-B|^2 = 2A^2 + 2B^2$$

إذاً

$$2A^2 = |A+B|^2 + |A-B|^2 - 2B^2$$

$$2A^2 = 5^2 + 3^2 - 2\times 2^2 = 42$$

$$A^2 = 21 \quad \rightarrow \quad A = 4.6$$

(10)

Two vectors A= i - j + 3k and B= 2i + j – 2k. Find a vector C which is normal to both A nd B

SOLUTION

من الملاحظات التي أوردناها عن خصائص الضرب الاتجاهي مايلي:

المتجه الناتج عن الضرب الاتجاهي سيكون عموديا على كلي المتجهين، على سبيل المثال A×B سيكون عمودياً على كل من A و B

C=A×B= -i + 8j + 3k